



Cálculo Diferencial e Integral I

6ª Ficha de problemas

Funções reais de variável real. Diferenciabilidade.

1. Determine, conhecendo as derivadas das funções tangente e seno, as derivadas das funções:

$$a) h_1(x) = \operatorname{arctg} x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad b) h_2(x) = \operatorname{arcsen} x, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

2. Determine a derivada para cada uma das seguintes expressões:

$$a) e^{\operatorname{arctg} x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad b) (\ln x)^x, \quad x \in]1, +\infty[\quad c) x^{x-1}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

3. Sendo f a função definida em \mathbb{R} , da forma seguinte:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{se } x < 0 \\ \operatorname{arctg}(x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Sendo $a < 0$ e $b > 0$, calcule $f'(a)$ e $f'(b)$ e escreva equações das tangentes ao gráfico de f nos pontos de abcissa a e b .
b) Justifique que $f'(0) = 1$.
c) Utilize os resultados de a) e b) para justificar que f não tem extremos locais.
4. Considere a função f a função definida em \mathbb{R} , contínua no ponto 0 e tal que

$$f(x) = \frac{x}{2 + e^{\frac{1}{x}}}, \quad \forall x \neq 0$$

Calcule as derivadas laterais de f no ponto 0.

5. Determine o domínio, o domínio de diferenciabilidade e calcule a derivada da função definida por $y = \sqrt{\operatorname{ch} x - 1}$.
Calcule as suas derivadas laterais no ponto 0.

6. Determine o domínio, o domínio de diferenciabilidade e calcule a derivada das seguinte funções:

$$a) \ln(x \operatorname{sh} x); \quad b) \operatorname{arcsen}(\operatorname{arctg} x); \quad c) \frac{e^x}{1+x}; \quad d) \ln(\operatorname{arcsen}(\frac{x+1}{x-1}))$$

7. Sejam a, b reais e f uma função contínua em $[a, b]$ duas vezes diferenciável em $]a, b[$. Suponha que o gráfico de f e o segmento de recta de extremos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ se intersectam um ponto $(x_0, f(x_0))$ com x_0 pertencente a $]a, b[$. Mostre que existe c pertencente a $]a, b[$ tal que $f''(c) = 0$.