



Cálculo Diferencial e Integral I

2ª Ficha de problemas

Sucessões de números reais

1. Seja a_n o termo geral de uma sucessão tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$

$$0 < a_n < a_{n+1} < 1$$

- a) Justifique que a sucessão é convergente e indique um intervalo (de comprimento tão pequeno quanto possível) que contenha o limite de qualquer sucessão que satisfaça as condições impostas a a_n .
- b) Indique o supremo e o ínfimo do conjuntos dos termos da sucessão; este conjunto terá máximo? E mínimo? Justifique abreviadamente as respostas.

2. Justifique que se, as condições

$$u_n > 0 \quad \text{e} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

são verificadas qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, u_n é convergente. Mostre ainda, recorrendo à definição de limite, que o limite de u_n , não pode ser um número negativo.

3. Considere a sucessão x_n ,

$$x_1 = \frac{3}{2} \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 + 2)$$

- a) Recorrendo ao princípio de indução matemática, verifique que $1 < x_n < 2$, $n \in \mathbb{N}$.
- b) Mostre que a sucessão é decrescente.
- c) A sucessão x_n é convergente? Justifique.
4. Sendo x_n uma sucessão de números reais não negativos que converge para $x > 0$. Mostre que a sucessão $\sqrt{x_n}$ converge e que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$.
5. Determine, se existirem, os limites das sucessões que têm por termo de ordem n :

$$a) \frac{n^2 - 1}{n^4 + 3}, \quad b) \frac{2^n + 1}{2^{n+1} - 1}, \quad c) \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p)}{(n+1)(n+2)\dots(n+q)}, \quad d) \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^2}, \quad e) \frac{a^n b^n}{a^n + b^n}; \quad a, b \in \mathbb{R}^+$$