Cálculo Diferencial e Integral I

2º Exame - (MEMec; MEAer)

26 de Janeiro de 2009 - 9 horas

I(5,5 val.)

1. Considere a sucessão a_n,

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \sqrt{5 + a_n}, \qquad\qquad n \geq 1$$

Mostre por indução matemática que a sucessão a_n é monótona.

2. Indique duas séries numéricas $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ de termos positivos, uma convergente e outra divergente, em que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

3. Considere a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+2}}(x+3)^{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\right) \qquad\qquad x \in \mathbb{R}.$$

   i) Indique o intervalo de convergência da série.

   ii) Indique a soma da série no intervalo de convergência indicado.

II (6 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln^2(x+1) + 4\ln(x+1)}{(1+\ln(x+1))^2} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 3x + 4 + \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

   i) Defina a função derivada de f.

   ii) A função f tem extremos em $]-\infty, 0[$? Justifique.

   iii) Indique o polinómio de Taylor do 2º grau em potências de $x+1$ associado a f.

2. Determine, se existir, o seguinte limite

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}.$$

3. Indique uma condição para que a função polinomial $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ em que $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tenha função inversa.

III(6,5 val.)

1. Determine o valor dos integrais

$$\int_0^1 \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + 9}\, dx, \qquad\qquad \int_0^1 e^{2x} \operatorname{sen} 3x\, dx.$$

2. Considere a função $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^{x^2+1} \frac{dt}{3 + 2g(t)}$$

em que g é uma função contínua em $[0,2]$ tal que $|g| \leq 1$.

   i) A função F é diferenciável? Justifique e em caso afirmativo defina a função derivada.

   ii) Quando $g(t) = \cos t$, determine $F(0)$, recorrendo ao método de integração por substituição.
   Sugestão: Utilize a substituição $u = \operatorname{tg}(t/2)$ e recorde que $\cos t = \frac{1-\operatorname{tg}^2(t/2)}{1+\operatorname{tg}^2(t/2)}$.

3. Determine a área da região plana situada no semiplano $x \geq 0$ limitada pela curva $4y = x^3$ e a recta tangente a essa curva em $x = -2$.

IV(2 val.)

1. Considere-se a série numérica de termos positivos $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, s_n a sucessão das somas parciais associada, e uma função contínua decrescente positiva f tal que $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$

   i) Verifique que para $n \in \mathbb{N}$,

$$s_{n+1} < a_1 + \int_1^{n+1} f(t)\, dt$$

   começando por mostrar que para $k \in \mathbb{N}$,

$$a_{k+1} < \int_k^{k+1} f(t)\, dt < a_k.$$

   ii) Mostre que se existe $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\, dt$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série convergente.

2. Como aplicação do resultado estabelecido em 1-ii) conclua que a série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

é convergente.