Cálculo Diferencial e Integral I

1ºExame/2º Teste - (MEMec; MEAer)

12 de Janeiro de 2009 - 9 horas

***Exame* I(4 val.)**

1. Considere a sucessão $w_n = u_n + v_n$, $n \in \mathbb{N}$, em que

$$u_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{3^n(2n)!}} \qquad v_1 = 1, \qquad v_{n+1} = \frac{1}{v_n^{-1} + 2}$$

   i) Determine o limite da sucessão u_n. A sucessão u_n é limitada? Justifique.

   ii) Mostre que a sucessão v_n é decrescente.

   iii) A sucessão v_n é de Cauchy? Justifique.

   iv) A sucessão w_n é convergente? Justifique e em caso afirmativo determine o limite.

***Exame* II (6 val.)**

1. Considere a função $f : [-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+3) + 1 & \text{se} \quad x > 1 \\ \\ \cos(\operatorname{arcsen} x) & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

   i) A função f é diferenciável em $x = 1$?

   ii) Defina a função derivada de f.

   iii) A função f é monótona no intervalo $[1, +\infty[$? A função f tem extremos no domínio? Justifique.

   iv) Indique um majorante do erro que se comete ao aproximar a função f em $[1, 3]$ pelo polinómio de Taylor do 2º grau em potências de $x - 2$.

2. Determine, se existir, o seguinte limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2 \operatorname{tg} x}.$$

3. Sendo f uma função com quatro zeros em $]a, b[$, (sendo $a, b \in \mathbb{R}$, $\quad a < b$) e com derivada de terceira ordem contínua em $]a, b[$, terá a função f''' um zero em $]a, b[$? Justifique.

Exame/2º Teste **III(6 val.)**

1. Determine o valor do integral
$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx.$$

2. Considere a função $F :]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$
$$F(x) = \int_0^{\cos x} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(4-t^2)}} dt$$
   i) Defina a derivada de $F(x)$
   ii) A função F é monotona? Justifique.

3. Determine, usando o método de substituição, o valor do integral
$$\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}+2} dx$$
Sugestão: Utilize a substituição $\sqrt{x-1} = t$

4. Determine a área da região plana de $\mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y^2 = -4(x-1) \qquad \text{e} \qquad y^2 = -2(x-2)$$

5. Sabendo que f tem derivadas contínuas até à 2ª ordem em $\mathbb{R}$, e que para $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$, mostre que
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt.$$

Exame/2º Teste **IV(4 val.)**

1. Analise a natureza das séries numéricas indicadas e determine a soma de uma delas
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+5}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n n!} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3-e^n}{3^n}$$

2. Determine o intervalo de $\mathbb{R}$ onde é convergente a série de potências
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n^2} (x-1)^{n+2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$