Cálculo Diferencial e Integral I

1ºExame/2º Teste - (MEEC; MEMec; MEAer; LEAN)

23 de Junho de 2008 - 9 horas

Exame **I(3,5 val.)**

1. Mostre por indução matemática, que qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2. Considere a sucessão convergente de termos reais

$$u_n = \sqrt[n]{\frac{n!\,2^n}{n^n}} + \frac{1}{2^n}$$

   i) Determine o limite da sucessão u_n.

   ii) A sucessão é de Cauchy? Justifique.

Exame **II (6,5 val.)**

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x - 2\operatorname{arctg}(x-1) & \text{se} \quad x \geq 1 \\ \\ (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

   i) Defina a função derivada de f.

   ii) A função é monótona no intervalo $]1,3[$? Tem extremos nesse intervalo? Justifique.

   iii) Indique o polinómio de Taylor do 2º grau em potências de x associado à função no intervalo $]-1/2, 1/2[$.

2. Determine, se existir, o seguinte limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\ln x}.$$

3. Qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$, a equação $x^3 - 3x + b = 0$ tem mais que uma solução em $[-1,1]$? Justifique e indique o subconjunto de $\mathbb{R}$ a que b deve pertencer para que a equação tenha uma única solução em $]-1,1[$.

***Exame/2º Teste* III(6 val.)**

1. Determine o valor dos seguintes integrais

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 2} dx, \qquad \int_0^2 \frac{x \ln(x^2+1)}{x^2+1} dx.$$

2. Considere a função $F : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$$

   i) Mostre que $F(x) \leq x^2$

   ii) Determine $F'(x)$.

3. Determine o valor do integral usando a substituição $t = \sqrt{1 - e^x}$.

$$\int_{-\ln 2}^{-\ln 4} \frac{e^{x/2}}{\sqrt{1 - e^x}} dx$$

4. Mostre que se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável e existe $p \in \mathbb{R}^+$ tal que para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $f(x+p) = f(x)$ então

$$\int_0^a f(x)dx = \int_p^{p+a} f(x)dx, \qquad a > 0$$

***Exame/2º Teste* IV(4 val.)**

1. Considere as séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^5\left(1+\sqrt{n}\right)} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n}{n2^n}$$

   As séries anteriores são convergentes ? Justifique.

2. Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{5^n} (x+1)^{n+2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

   i) Indique o maior intervalo aberto I em que a série é absolutamente convergente

   ii) Determine a soma da série para $x \in I$

3. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ uma série de potências simplesmente convergente em $x = 3$. Indique, justificando, qual a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.