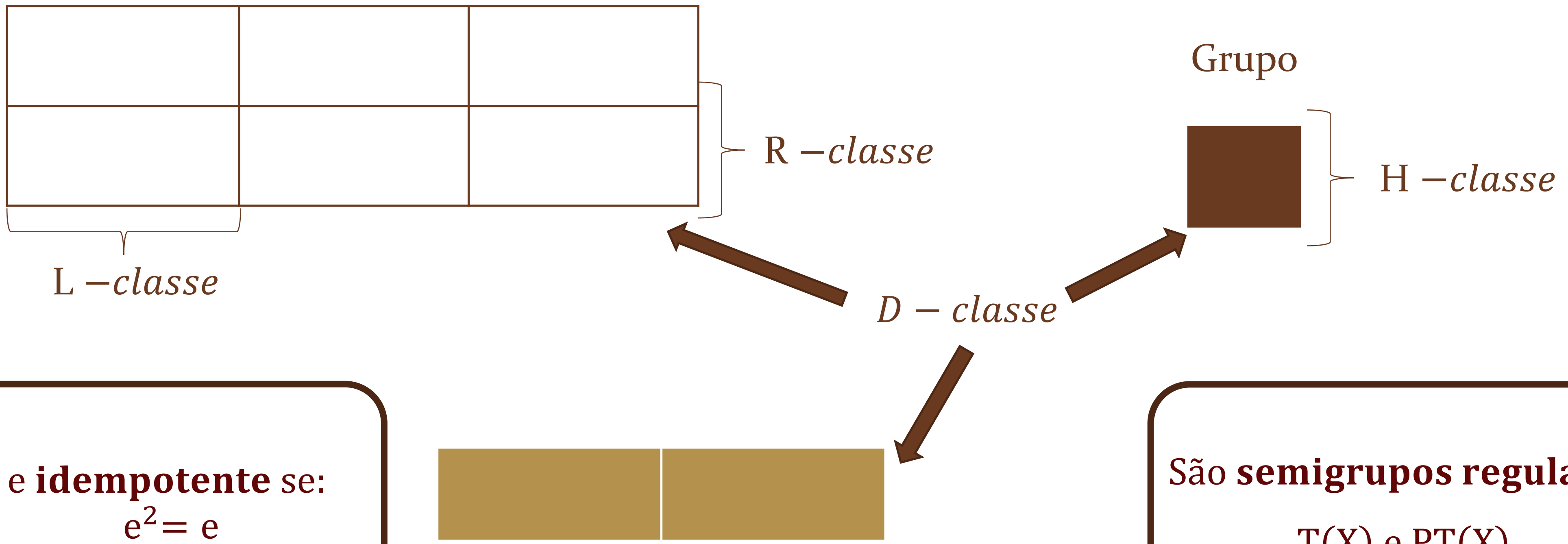
Semigrupos Inversos Fundamentais

ANA CATARINA MONTEIRO

TUTORA: GRACINDA GOMES, FCUL

Estrutura de um semigrupo



e **idempotente** se:
$e^2 = e$

São **semigrupos regulares**:

T(X) e PT(X)

Semigrupos Inversos

- Seja S um semigrupo com conjunto de idempotente $E(S)$.
- S é **inverso** se:

$$\begin{cases} \forall e, f \in E(S),\ ef = fe & (1) \\ \forall a \in S,\ \exists a^{-1} \in S\colon\ a = aa^{-1}a \ \wedge a^{-1} = a^{-1}aa^{-1} & (2) \end{cases}$$

Semigrupos Inversos – Simetria Parcial

Representação de um Semigrupo Inverso S

- Morfismo de S para algum semigrupo inverso simétrico $\mathcal{I}_X$:

$$\phi: S \longrightarrow \mathcal{I}_X$$

- Se ϕ injetivo, diz-se que a representação é fiel.

Representação de Vagner-Preston

Consideremos, em particular, a seguinte representação:

$$\begin{aligned}\phi: S &\longrightarrow \mathcal{I}_S \\ a &\longmapsto \rho_a: Saa^{-1} \longrightarrow Sa^{-1}a \\ &\qquad\qquad\qquad x \longmapsto xa\end{aligned}$$

Semigrupos Inversos Fundamentais

Em semigrupos inversos:

$$a\mathcal{H}b \Leftrightarrow aa^{-1} = bb^{-1},\ a^{-1}a = b^{-1}b$$

Maior congruência em S que está contida em $\mathcal{H}$:

$$a\mu b \Leftrightarrow \forall e = e^2,\ aea^{-1} = beb^{-1}$$

S grupo ⟹ μ é universal

Um semigrupo inverso é fundamental se $\mu = 1_S$

Semigrupo de Munn

- E semireticulado
- Dado $e \in E$, $\; Ee = \{i \in E \colon i \leq e\}$, onde $i \leq e \iff i \cdot e = i$
- Temos a relação

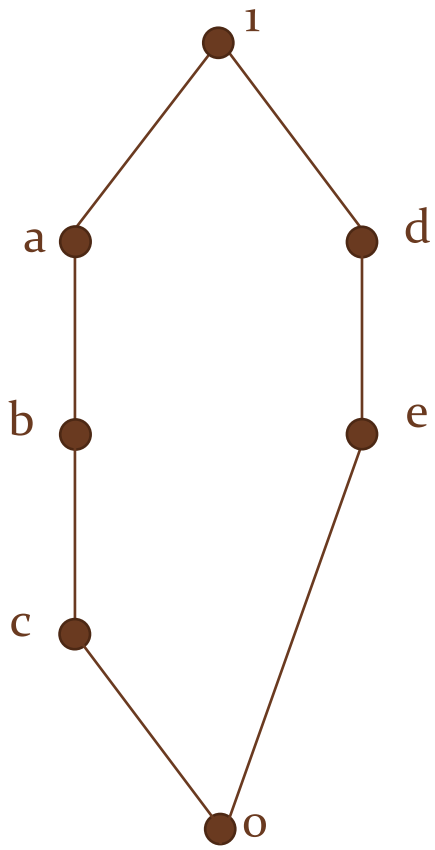
$$\mathcal{U} = \{(e, f) \in E \times E \colon Ee \simeq Ef\}$$

- Dado $(e, f) \in \mathcal{U}$,

$\mathrm{T}_{e,f}$ - conjunto dos isomorfismos de Ee para Ef

- $\mathrm{T}_E \coloneqq \bigcup \{T_{e,f} \colon (e, f) \in \mathcal{U}\}$ − **semigrupo de Munn** do semireticulado E, tendo-se $E(T_E) = \{Ee \longrightarrow Ee,\ x \longmapsto x \colon e \in E\} \simeq E$

Semigrupo de Munn – Exemplos 1



- Semireticulado $E, (|E| = 7)$
- $(a, x) \notin \mathcal{U}, \forall x \in E\backslash\{a\}$ e $Ea = \{0,\ a,\ b,\ c\}$
- $(b, d) \in \mathcal{U}$, pois $Eb = \{0,\ b,\ c\} \simeq \{0,\ d,\ e\} = Ed$
- $(c, e) \in \mathcal{U}$, pois $Ec = \{0,\ c\} \simeq \{0,\ e\} = Ee$
- Logo,

$$|T_E| = 11$$

Semigrupo de Munn – Exemplos 2

- $E = \{0 < 1 < \ 2 < \cdots\}$
- Para cada n,

$$En = \{0,\ 1, \dots, n\}$$

- $En \ \simeq Em \ \Leftrightarrow m = n.$
- $\mathcal{U} = 1_E.$
- $T_{n,n} = \{1_{En}\}$, pelo que,

$$T_E = \{1_{E0},\ 1_{E1},\ \ \dots\} \simeq E$$

Semigrupo de Munn – Exemplos 3

- $E = C_\omega = \{e_0 > e_1 > e_2 > \cdots\}$
- Tem-se,

$$Ee_n = \{e_n,\ e_{n+1},\ e_{n+2},\ \dots\},$$

- $Ee_m \simeq Ee_n\ \forall n, m \in \mathbb{N}^0$, e o isomorfismo é dado por:

$$\alpha_{m,n}(e_k) = e_{k-m+n}, \quad (k \geq m)$$

- Então,

$$T_E = \{\alpha_{m,n},\ n, m \in \mathbb{N}^0\}$$

Dados $\alpha_{m,n}, \alpha_{p,q} \in T_E$ e definindo $t = max(n, p)$, o seu produto será

$$\alpha_{m,n}\alpha_{p,q} = \alpha_{m-n+t,q-p+t}$$

Representação de Munn

- S semigrupo inverso

$$\phi: S \longrightarrow T_E$$
$$s \longmapsto \rho_s : Ess^{-1} \longrightarrow Es^{-1}s$$
$$x \longmapsto xs$$

é um morfismo cujo *kernel* é μ

S é fundamental ⇔ S isomorfo a um subsemigrupo inverso cheio de T_E

Variedades de Semigrupos Inversos

- **Definição:** Classe de semigrupos inversos $\mathcal{V}$:
  - ✓Fechada para subsemigrupos inversos;
  - ✓Fechada para quocientes;
  - ✓Fechada para produtos diretos em número finito.

onde

S’ é quociente de S se existe um morfismo $\phi: S \longrightarrow S'$, sobrejetivo

Variedades de Semigrupos Inversos

- Um subsemigrupo de um semigrupo inverso pode não ser inverso.

Consideremos $X = \{1,\ 2,\ 3\}$ e o semigrupo inverso simétrico $\mathcal{I}_X$,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \emptyset \right\}$$

B é subsemigrupo de $\mathcal{I}_X$, no entanto, não é subsemigrupo inverso.

Exemplos

- Os semigrupos inversos formam uma variedade
- Os semigrupos inversos fundamentais **não** formam uma variedade, por exemplo, $\mathcal{I}(X)$ é fundamental, no entanto $\mathcal{G}(X)$, o grupo simétrico, que é subsemigrupo inverso de $\mathcal{I}(X)$, não o é.

Produto Subdireto

- S é **produto subdireto** de S_1 e S_2, semigrupos, se existe

$$\phi: S \hookrightarrow S_1 \times S_2$$

um mergulho tal que para $i = 1,2$,

$$\pi_i \phi: S \longrightarrow S_i, \;\; a \longmapsto a_i$$

é um morfismo sobrejetivo.

Formações de Semigrupos Inversos

Definição: Classe de semigrupos inversos $\mathcal{F}$:

- ✓Fechada para quocientes
- ✓Fechada para produtos subdiretos em número finito

Ser variedade $\Rightarrow$ Ser formação

Ser formação $\nRightarrow$ Ser variedade

O estudo de formações em semigrupos é relativamente recente (Bolinches, Branco, Gomes, Pin, Soler-Escrivà, ...)

Semigrupos Inversos Fundamentais- Constituem uma formação?

- Semigrupos inversos fundamentais não são fechados para quocientes.

- $|X| \geq 2$. Temos o morfismo sobrejetivo

$$\phi\colon \mathcal{I}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X)^0$$
$$\begin{cases} \alpha \mapsto \alpha, & \alpha \in \mathcal{G}(X) \\ \alpha \mapsto 0, & \alpha \notin \mathcal{G}(X) \end{cases}$$

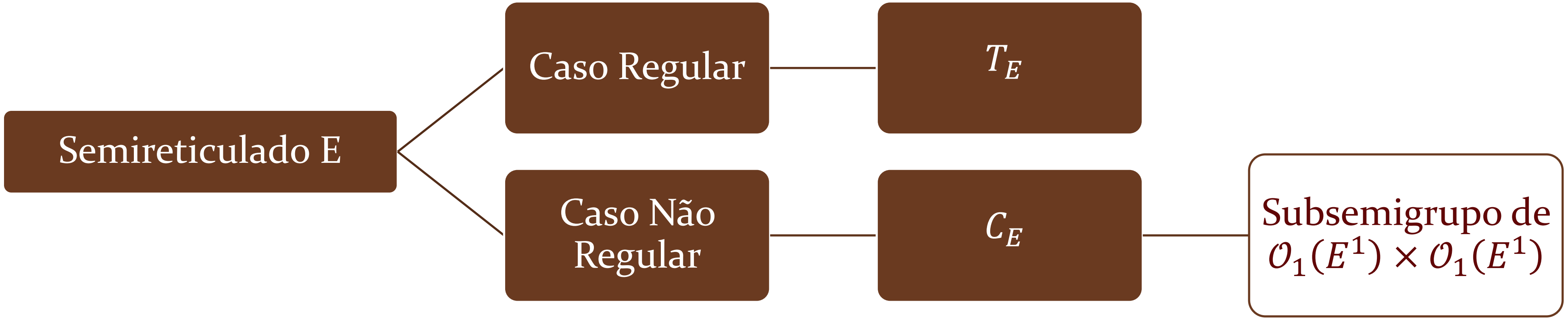
$\mathcal{I}(X)$ é fundamental, no entanto, $\mathcal{G}(X)^0$, que é quociente de $\mathcal{I}(X)$, não o é.

Semigrupos Inversos Fundamentais- Constituem uma formação?

- Semigrupos inversos fundamentais não são fechados para quocientes.
- São fechados para morfismos que separam idempotentes, quer nos produtos subdiretos, quer nos quocientes.
- Então, a classe de todos os semigrupos inversos fundamentais forma uma classe destas – **i-formação**

Próximos Passos…

- Classes de semigrupos não regulares, com propriedades semelhantes ao caso fundamental



- $\mathcal{O}_1(E^1)$ é o conjunto de todas as funções, que preservam a ordem, de E^1 para E.

Bibliografia

1) J. M. Howie. *Fundamentals of Semigroup Theory*. Oxford University Press, 1995.

2) K. Doerk e T. Hawkes. *Finite Soluble Groups*. Walter de Gruyter, 1992.

3) A. Ballester-Bolinches, J. E. Pin, e X. Soler-Escrivà. *"Formations of finite monoids and formal languages: Eilenberg's variety theorem revisited"*. Forum Mathematicum. 26 (6) 2012, 1737–1761.

4) G.M.S. Gomes e I.J. Nobre. *"On formations of inverse semigroups and their products"*. [Em preparação]

5) M.J.J. Branco, G.M.S. Gomes, J.E. Pin e X. Soler-Escrivà *"On formations of monoids"*. Journal of Pure and Applied Algebra 224(11):106401