Abordagens lógicas a classes de complexidade

Stefan Sequeira

FCT

Universidade Nova de Lisboa

6 de Março

Complexidade Computacional

Complexidade Computacional

Complexidade Computacional

Área da ciência da computação teórica que:

Complexidade Computacional

Área da ciência da computação teórica que:

- Estuda a quantidade de recursos (tempo, espaço, etc.);

Complexidade Computacional

Área da ciência da computação teórica que:

- Estuda a quantidade de recursos (tempo, espaço, etc.);
- Classifica problemas.

Complexidade Computacional

Área da ciência da computação teórica que:

- Estuda a quantidade de recursos (tempo, espaço, etc.);
- Classifica problemas.

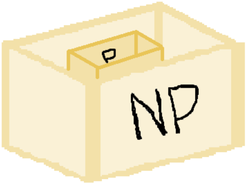


Figure: Representação das classes P e NP se $P \neq NP$

Notação

Notação

Notação

Notação binária: $\{0, 1\}$

Notação

Notação binária: $\{0, 1\}$

Conjunto das sequências finitas: $\{0, 1\}^*$

Notação

Notação binária: $\{0, 1\}$

Conjunto das sequências finitas: $\{0, 1\}^*$

$$010111, \quad 001$$

Notação

Notação binária: $\{0,\ 1\}$

Conjunto das sequências finitas: $\{0,1\}^*$

$$010111, \quad 001$$

$x \in \{0,1\}^*$,

Notação

Notação binária: $\{0,\ 1\}$

Conjunto das sequências finitas: $\{0,1\}^*$

$$010111, \quad 001$$

$x \in \{0,1\}^*$,

$|x|$: Comprimento (nº de dígitos).

Notação

Notação binária: $\{0,\ 1\}$

Conjunto das sequências finitas: $\{0,1\}^*$

$$010111, \quad 001$$

$x \in \{0,1\}^*$,

$|x|$: Comprimento (nº de dígitos).

$$|010111| = 6,\ |001| = 3$$

Notação

Notação binária: $\{0, 1\}$

Conjunto das sequências finitas: $\{0, 1\}^*$

$$010111, \quad 001$$

$x \in \{0, 1\}^*$,

$|x|$: Comprimento (nº de dígitos).

$$|010111| = 6, \ |001| = 3$$

Palavra vazia: ϵ

Notação

Notação

$$f : (\{0,1\}^*)^n \longrightarrow \{0,1\}^*$$

Notação

$$f : (\{0,1\}^*)^n \longrightarrow \{0,1\}^*$$

$$x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\}^*$$

Notação

$f : (\{0,1\}^*)^n \longrightarrow \{0,1\}^*$

$x_1, ..., x_n \in \{0,1\}^*$

$\bar{x} = (x_1, ..., x_n),\ |\bar{x}| = (|x_1|, ..., |x_n|)$

Notação

$f : (\{0,1\}^*)^n \longrightarrow \{0,1\}^*$

$x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\}^*$

$\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ |\bar{x}| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$

$f_1, \ldots, f_m$

Notação

$$f : (\{0,1\}^*)^n \longrightarrow \{0,1\}^*$$

$$x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\}^*$$

$$\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ |\bar{x}| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$$

$$f_1, \ldots, f_m$$

$$\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x}))$$

Notação

Notação

$x, y \in \{0, 1\}^*$

Notação

$x, y \in \{0,1\}^*$

- $x \widehat{\ } y$ (ou xy)

Notação

$x, y \in \{0,1\}^*$

- $x \frown y$ (ou xy)

$$010111 \frown 001 = 010111001$$

Notação

$x, y \in \{0,1\}^*$

- $x\widehat{\ }y$ (ou xy)

$$010111\widehat{\ }001 = 010111001$$

- $x \subseteq y$

Notação

$x, y \in \{0,1\}^*$

- $x \frown y$ (ou xy)

$$010111 \frown 001 = 010111001$$

- $x \subseteq y$

$\exists z \in \{0,1\}^* : xz = y$

Notação

$x, y \in \{0,1\}^*$

- $x\widehat{\ }y$ (ou xy)

$$010111\widehat{\ }001 = 010111001$$

- $x \subseteq y$

$\exists z \in \{0,1\}^* : xz = y$

$$001 \not\subseteq 010111, \qquad 010 \subseteq 010111$$

Notação

Notação

- $X_{|y}$

Notação

- $x_{|y}$

$$x_{|y} = \begin{cases} x, \text{ se } |x| \leq |y| \\ z, \text{ se } z \subseteq x \wedge |z| = |y| \end{cases}$$

Notação

- $x_{|y}$

$$x_{|y} = \begin{cases} x, & \text{se } |x| \leq |y| \\ z, & \text{se } z \subseteq x \wedge |z| = |y| \end{cases}$$

$$010111_{|001} = 010, \quad 001_{|010111} = 001$$

Notação

- $x_{|y}$

$$x_{|y} = \begin{cases} x, \ \text{se } |x| \leq |y| \\ z, \ \text{se } z \subseteq x \wedge |z| = |y| \end{cases}$$

$$010111_{|001} = 010, \quad 001_{|010111} = 001$$

- $x \times y$

Notação

- $x_{|y}$

$$x_{|y} = \begin{cases} x, \text{ se } |x| \leq |y| \\ z, \text{ se } z \subseteq x \wedge |z| = |y| \end{cases}$$

$$010111_{|001} = 010, \quad 001_{|010111} = 001$$

- $x \times y$

$$010111 \times 001 = \underbrace{010111}\underbrace{010111}\underbrace{010111}$$

Notação

- $x_{|y}$

$$x_{|y} = \begin{cases} x, \text{ se } |x| \leq |y| \\ z, \text{ se } z \subseteq x \wedge |z| = |y| \end{cases}$$

$$010111_{|001} = 010, \quad 001_{|010111} = 001$$

- $x \times y$

$$010111 \times 001 = \underbrace{010111}\underbrace{010111}\underbrace{010111}$$

Polinómios com coeficientes e indeterminadas em $\mathbb{N}$.

Máquinas de Turing

Máquinas de Turing

Máquinas de Turing

Máquina de Turing, M:

Máquinas de Turing

Máquina de Turing, M:

- Conjunto de estados finito: Q

Máquinas de Turing

Máquina de Turing, M:

- Conjunto de estados finito: Q
- Função de transição:

$$\delta : Q \times \{0, 1, B\}^k \longrightarrow Q \times \{0, 1, B\}^k \times \{R, L, H\}^k$$

$(k \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$

Máquinas de Turing

Máquina de Turing, M:

- Conjunto de estados finito: Q
- Função de transição:

$$\delta : Q \times \{0, 1, B\}^k \longrightarrow Q \times \{0, 1, B\}^k \times \{R, L, H\}^k$$

$(k \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$

Estado inicial: q_0^M (ou q_0)

Máquinas de Turing

Máquinas de Turing

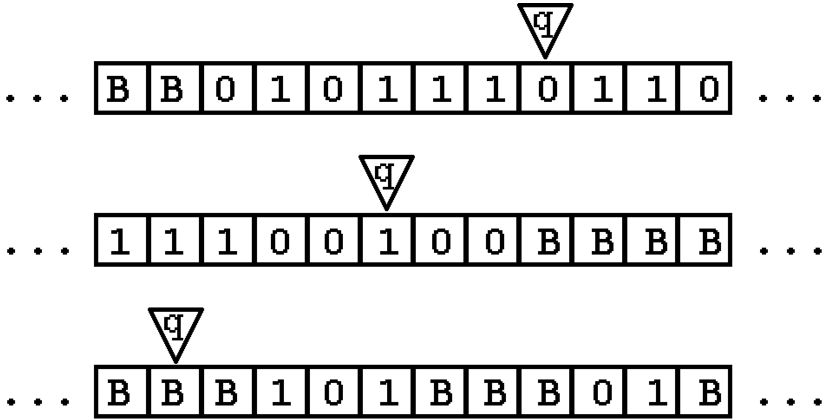
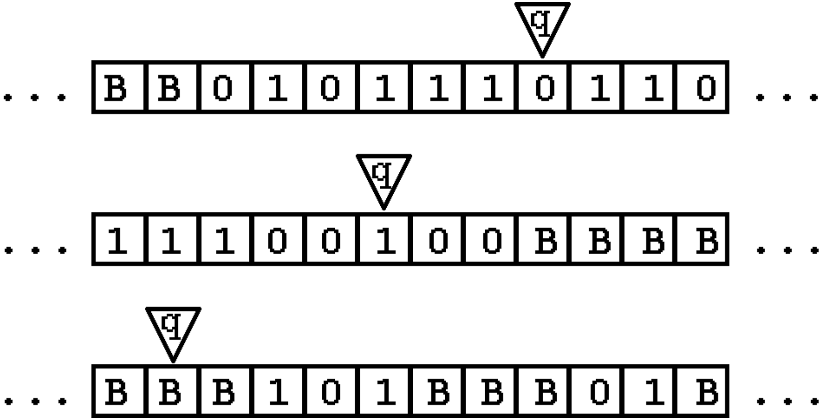
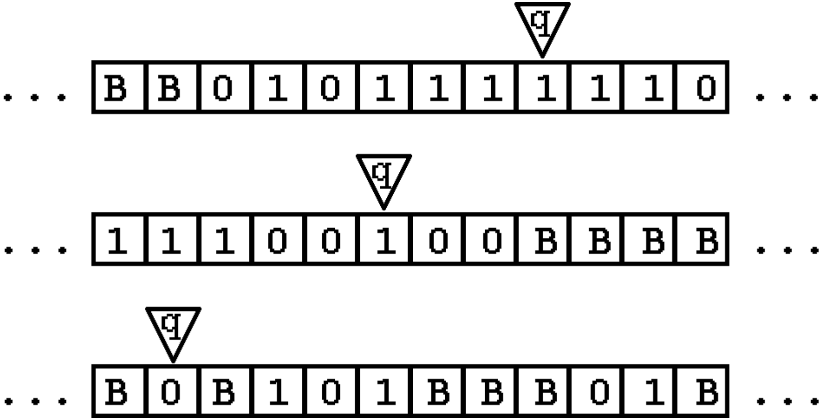


Figure: Máquina de Turing com três fitas

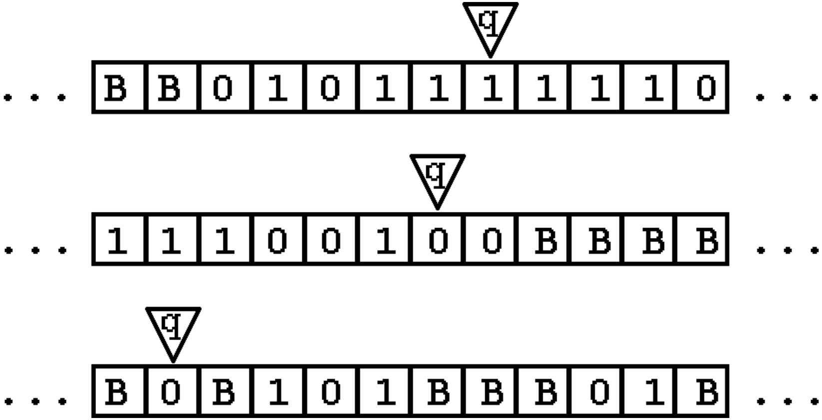
Máquinas de Turing



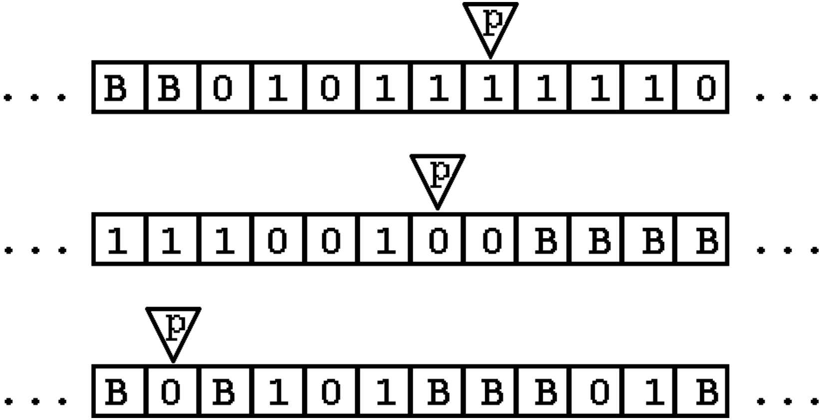
Máquinas de Turing



Máquinas de Turing



Máquinas de Turing



Máquinas de Turing

Máquinas de Turing

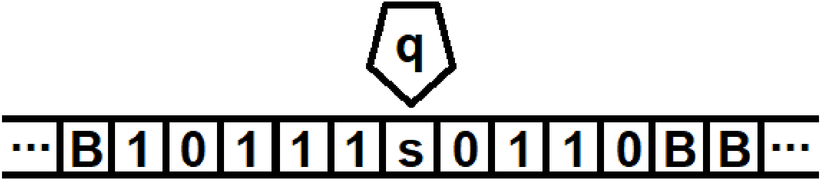


Figure: Máquina de Turing com uma fita

Máquinas de Turing

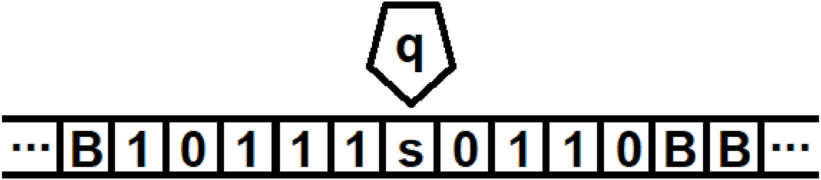


Figure: Máquina de Turing com uma fita

$$(q, s) \in Q \times \{0, 1, B\}, \quad \delta(q, s) = (q', s', m), \quad (q, s, q', s', m)$$

Máquinas de Turing

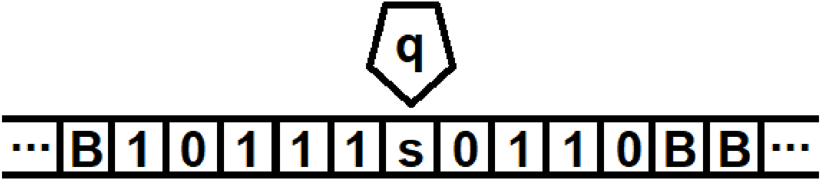


Figure: Máquina de Turing com uma fita

$(q, s) \in Q \times \{0, 1, B\}, \quad \delta(q, s) = (q', s', m), \quad (q, s, q', s', m)$

Configuração da fita: $\sigma_1 ... \sigma_l q \sigma_{l+1} ... \sigma_m$

$(\sigma_i \in \{0, 1, B\}, \forall i \in 1, ..., m$ e $q \in Q)$

Máquinas de Turing

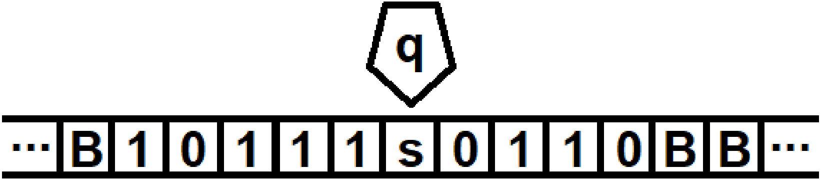


Figure: Máquina de Turing com uma fita

$(q, s) \in Q \times \{0, 1, B\}, \quad \delta(q, s) = (q', s', m), \quad (q, s, q', s', m)$

Configuração da fita: $\sigma_1 ... \sigma_l q \sigma_{l+1} ... \sigma_m$

$(\sigma_i \in \{0, 1, B\}, \forall i \in 1, ..., m$ e $q \in Q)$

$$10111qs0110$$

Máquinas de Turing

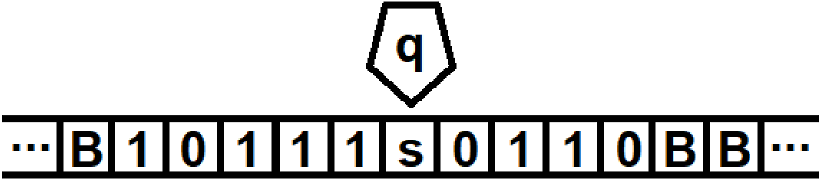


Figure: Máquina de Turing com uma fita

$(q, s) \in Q \times \{0, 1, B\}, \quad \delta(q, s) = (q', s', m), \quad (q, s, q', s', m)$

Configuração da fita: $\sigma_1 ... \sigma_l q \sigma_{l+1} ... \sigma_m$

$(\sigma_i \in \{0, 1, B\}, \forall i \in 1, ..., m$ e $q \in Q)$

$$10111qs0110$$

Relação de próxima configuração: $C_i \vdash C_j$

Funções computáveis, recursos e classes de computação

Funções computáveis, recursos e classes de computação

Funções computáveis, recursos e classes de computação

Função f n-ária computável: existe M_f máquina de Turing com conjunto de estados $Q = \{q_0, ..., q_k\}$ tal que

Funções computáveis, recursos e classes de computação

Função f n-ária computável: existe M_f máquina de Turing com conjunto de estados $Q = \{q_0, ..., q_k\}$ tal que

$$M_f : q_0\bar{x} \vdash ... \vdash q_{\bar{x}} f(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n$$

$$(q_{\bar{x}} \in Q)$$

Funções computáveis, recursos e classes de computação

Funções computáveis, recursos e classes de computação

M máquina de Turing.

Funções computáveis, recursos e classes de computação

M máquina de Turing.

Tuplo $\bar{x}$ de sequências

Funções computáveis, recursos e classes de computação

M máquina de Turing.

Tuplo $\bar{x}$ de sequências

- $\mathrm{time}_M(\bar{x})$: Número de instruções executadas;

Funções computáveis, recursos e classes de computação

M máquina de Turing.

Tuplo $\bar{x}$ de sequências

- $\mathrm{time}_M(\bar{x})$: Número de instruções executadas;
- $\mathrm{space}_M(\bar{x})$: Número de casas visitadas.

Funções computáveis, recursos e classes de computação

Funções computáveis, recursos e classes de computação

$f : (\{0,1\}^*)^n \longrightarrow \{0,1\}^*.$

Funções computáveis, recursos e classes de computação

$f : (\{0,1\}^*)^n \longrightarrow \{0,1\}^*$.

f é computável em tempo polinomial se:

Funções computáveis, recursos e classes de computação

$f : (\{0,1\}^*)^n \longrightarrow \{0,1\}^*$.

f é computável em tempo polinomial se:

- Existe máquina de Turing M_f que compute f;

Funções computáveis, recursos e classes de computação

$f : (\{0,1\}^*)^n \longrightarrow \{0,1\}^*$.

f é computável em tempo polinomial se:

- Existe máquina de Turing M_f que compute f;
- Existe polinómio p tal que $\mathrm{time}_{M_f}(\bar{x}) \leq p(|\bar{x}|)$, $\forall \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n$.

Funções computáveis, recursos e classes de computação

$f : (\{0,1\}^*)^n \longrightarrow \{0,1\}^*$.

f é computável em tempo polinomial se:

- Existe máquina de Turing M_f que compute f;
- Existe polinómio p tal que $\mathrm{time}_{M_f}(\bar{x}) \leq p(|\bar{x}|)$, $\forall \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n$.

f é computável em espaço polinomial se:

Funções computáveis, recursos e classes de computação

$f : (\{0,1\}^*)^n \longrightarrow \{0,1\}^*$.

f é computável em tempo polinomial se:

- Existe máquina de Turing M_f que compute f;
- Existe polinómio p tal que $\mathrm{time}_{M_f}(\bar{x}) \leq p(|\bar{x}|)$, $\forall \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n$.

f é computável em espaço polinomial se:

- Existe máquina de Turing M_f que compute f;

Funções computáveis, recursos e classes de computação

$f : (\{0,1\}^*)^n \longrightarrow \{0,1\}^*$.

f é computável em tempo polinomial se:

- Existe máquina de Turing M_f que compute f;
- Existe polinómio p tal que $\mathrm{time}_{M_f}(\bar{x}) \leq p(|\bar{x}|)$, $\forall \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n$.

f é computável em espaço polinomial se:

- Existe máquina de Turing M_f que compute f;
- Existe polinómio p tal que $\mathrm{space}_{M_f}(\bar{x}) \leq p(|\bar{x}|)$, $\forall \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n$.

Funções computáveis, recursos e classes de computação

Funções computáveis, recursos e classes de computação

PTIME, *PSPACE* - Classes das funções computáveis em tempo e espaço polinomial, respetivamente.

Funções computáveis, recursos e classes de computação

PTIME, *PSPACE* - Classes das funções computáveis em tempo e espaço polinomial, respetivamente.

EXPTIME - Classe das funções computáveis em tempo exponencial.

Funções computáveis, recursos e classes de computação

PTIME, *PSPACE* - Classes das funções computáveis em tempo e espaço polinomial, respetivamente.

EXPTIME - Classe das funções computáveis em tempo exponencial.

P - Classe de problemas de decisão que possuem uma máquina de Turing que as resolve em tempo polinomial.

Funções computáveis, recursos e classes de computação

PTIME, *PSPACE* - Classes das funções computáveis em tempo e espaço polinomial, respetivamente.

EXPTIME - Classe das funções computáveis em tempo exponencial.

P - Classe de problemas de decisão que possuem uma máquina de Turing que as resolve em tempo polinomial.

NP - Classe de problemas de decisão que possuem uma máquina de Turing não determinística que as resolve em tempo polinomial.

Funções computáveis, recursos e classes de computação

Funções computáveis, recursos e classes de computação

$$P = NP?$$

Caracterização de Cobham para PTIME

Caracterização de Cobham para PTIME

(Caracterização independente de máquinas)

Caracterização de Cobham para PTIME

Caracterização de Cobham para PTIME

Figure: Alan Cobham

Shallit, J. O. (2010). (n.d.). [Photograph]. Recursivity. http://recursed.blogspot.com/2010/04/alan-cobham.html

Caracterização de Cobham para PTIME

Caracterização de Cobham para PTIME

Pt.1: A mais pequena classe construída por

Caracterização de Cobham para PTIME

Pt.1: A mais pequena classe construída por

1. **(Projeções)** $\pi_j^n(x_1, ..., x_n) = x_j$, $1 \leq j \leq n$

Caracterização de Cobham para PTIME

Pt.1: A mais pequena classe construída por

1. **(Projeções)** $\pi_j^n(x_1, \ldots, x_n) = x_j$, $1 \leq j \leq n$
2. **(Sucessores)** $S_i(x) = xi$, $i = 0, 1$

Caracterização de Cobham para PTIME

Pt.1: A mais pequena classe construída por

1. **(Projeções)** $\pi_j^n(x_1, ..., x_n) = x_j$, $1 \leq j \leq n$
2. **(Sucessores)** $S_i(x) = xi$, $i = 0, 1$
3. **(Condicionais)** $C(x, y, z, w) = \begin{cases} z, & \text{se } x \subseteq y \\ w, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Caracterização de Cobham para PTIME

Pt.1: A mais pequena classe construída por

1. **(Projeções)** $\pi_j^n(x_1, ..., x_n) = x_j,\ 1 \leq j \leq n$
2. **(Sucessores)** $S_i(x) = xi,\ i = 0, 1$
3. **(Condicionais)** $C(x, y, z, w) = \begin{cases} z, & \text{se } x \subseteq y \\ w, & \text{caso contrário} \end{cases}$
4. **(Composições)** A função definida por

$$f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x}))$$

Com $h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$.

Caracterização de Cobham para PTIME

Pt.1: A mais pequena classe construída por

1. **(Projeções)** $\pi_j^n(x_1, ..., x_n) = x_j$, $1 \leq j \leq n$
2. **(Sucessores)** $S_i(x) = xi$, $i = 0, 1$
3. **(Condicionais)** $C(x, y, z, w) = \begin{cases} z, \text{ se } x \subseteq y \\ w, \text{ caso contrário} \end{cases}$
4. **(Composições)** A função definida por

$$f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x}))$$

   Com $h, \bar{g} \in \text{Pt.1}$.

5. **(Recursões Limitadas na Notação)** A função definida por

$$\begin{aligned} f(\epsilon, \bar{x}) &= g(\bar{x}) \\ f(yi, \bar{x}) &= h_i(y, \bar{x}, f(y, \bar{x}))_{|t(y,\bar{x})}, \quad i = 0, 1 \end{aligned}$$

Caracterização de Cobham para PTIME

Caracterização de Cobham para PTIME

5. **(Recursões Limitadas na Notação)** A função definida por

$$\begin{aligned} f(\epsilon, \bar{x}) &= g(\bar{x}) \\ f(yi, \bar{x}) &= h_i(y, \bar{x}, f(y, \bar{x}))_{|t(y,\bar{x})}, \quad i = 0, 1 \end{aligned}$$

Caracterização de Cobham para PTIME

5. **(Recursões Limitadas na Notação)** A função definida por

$$\begin{array}{rcl} f(\epsilon, \bar{x}) & = & g(\bar{x}) \\ f(yi, \bar{x}) & = & h_i(y, \bar{x}, f(y, \bar{x}))_{|t(y,\bar{x})}, \quad i = 0, 1 \end{array}$$

Com $h_0, h_1, g \in \mathrm{Pt}.1$

Caracterização de Cobham para PTIME

5. **(Recursões Limitadas na Notação)** A função definida por

$$\begin{aligned} f(\epsilon, \bar{x}) &= g(\bar{x}) \\ f(yi, \bar{x}) &= h_i(y, \bar{x}, f(y, \bar{x}))_{|t(y, \bar{x})}, \quad i = 0, 1 \end{aligned}$$

Com $h_0, h_1, g \in \mathrm{Pt}.1$ e t função limitativa.

Caracterização de Cobham para PTIME

Caracterização de Cobham para PTIME

1. **(Projeções)** $\pi_j^n(x_1, \ldots, x_n) = x_j$, $1 \leq j \leq n$
2. **(Sucessores)** $S_i(x) = xi$, $i = 0, 1$
3. **(Condicionais)** $C(x, y, z, w) = \begin{cases} z, & \text{se } x \subseteq y \\ w, & \text{caso contrário} \end{cases}$
4. **(Composições)** A função definida por
$$f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x}))$$
Com $h, \bar{g} \in \text{Pt.1}$.
5. **(Recursões Limitadas na Notação)** A função definida por
$$\begin{aligned} f(\epsilon, \bar{x}) &= g(\bar{x}) \\ f(yi, \bar{x}) &= h_i(y, \bar{x}, f(y, \bar{x}))_{|t(y,\bar{x})}, \quad i = 0, 1 \end{aligned}$$
Com $h_0, h_1, g \in \text{Pt.1}$ e t função limitativa.

Caracterização de Cobham para PTIME

Caracterização de Cobham para PTIME

Funções limitativas:

Caracterização de Cobham para PTIME

Funções limitativas:

Funções iniciais:

Caracterização de Cobham para PTIME

Funções limitativas:

Funções iniciais:
$\pi_j^n(x_1, ..., x_n) = x_j$, $1 \leq j \leq n$

Caracterização de Cobham para PTIME

Funções limitativas:

Funções iniciais:
$\pi^n_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j$, $1 \leq j \leq n$
$x \frown y$

Caracterização de Cobham para PTIME

Funções limitativas:

Funções iniciais:

$\pi_j^n(x_1, ..., x_n) = x_j$, $1 \leq j \leq n$

$x \frown y$

$x \times y$

Caracterização de Cobham para PTIME

Funções limitativas:

Funções iniciais:
$\pi_j^n(x_1, ..., x_n) = x_j$, $1 \leq j \leq n$
$x \frown y$
$x \times y$

Esquemas:

Caracterização de Cobham para PTIME

Funções limitativas:

Funções iniciais:
$\pi_j^n(x_1, \ldots, x_n) = x_j,\ 1 \leq j \leq n$
$x \frown y$
$x \times y$

Esquemas:
$h(\bar{g}(\bar{x}))$

Caracterização de Cobham para PTIME

Funções limitativas:

Funções iniciais:
$\pi_j^n(x_1, \ldots, x_n) = x_j$, $1 \leq j \leq n$
$x \frown y$
$x \times y$

Esquemas:
$h(\bar{g}(\bar{x}))$
$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) =$
$h(x_1, \ldots, x_{k-1}, z, x_{k+1}, \ldots, x_n), \quad z \in \{0, 1\}^*$

Caracterização de Cobham para PTIME

Caracterização de Cobham para PTIME

$$\wedge(y, x) = x \frown y$$

Caracterização de Cobham para PTIME

$$\wedge(y, x) = x\frown y$$

$x\frown\epsilon = x$

Caracterização de Cobham para PTIME

$$\wedge(y, x) = x\frown y$$

$x\frown\epsilon = x$

$i \in \{0, 1\} \quad , x\frown(yi) = (x\frown y)\frown i$

Caracterização de Cobham para PTIME

$$\wedge(y, x) = x\widehat{\ }y$$

$x\widehat{\ }\epsilon = x$

$i \in \{0, 1\} \quad , x\widehat{\ }(yi) = (x\widehat{\ }y)\widehat{\ }i$

$$\wedge(\epsilon, x) \quad = \quad \pi_1^1(x)$$

Caracterização de Cobham para PTIME

$$\wedge(y,x) = x\frown y$$

$x\frown\epsilon = x$

$i \in \{0,1\} \quad , x\frown(yi) = (x\frown y)\frown i$

$$\begin{aligned} \wedge(\epsilon, x) &= \pi_1^1(x) \\ \wedge\,(yi, x) &= S_i(\pi_3^3(y, x, \wedge(y,x)))_{|xy0}, \quad i = 0, 1 \end{aligned}$$

Caracterização de Cobham para PTIME

$$\wedge(y, x) = x\widehat{\ }y$$

$x\widehat{\ }\epsilon = x$

$i \in \{0, 1\} \quad , x\widehat{\ }(yi) = (x\widehat{\ }y)\widehat{\ }i$

$$\begin{array}{rcl} \wedge(\epsilon, x) & = & \pi_1^1(x) \\ \wedge\,(yi, x) & = & S_i(\pi_3^3(y, x, \wedge(y, x)))_{|xy0}, \quad i = 0, 1 \end{array}$$

$$\wedge \in Pt.1$$

Prova de Pt.1 $=$ PTIME

Prova de Pt.1 = PTIME

Prova de Pt.1 = PTIME

1. **(Projeções)** $\pi_j^n(x_1, \ldots, x_n) = x_j,\ 1 \leq j \leq n$
2. **(Sucessores)** $S_i(x) = xi,\ i = 0, 1$
3. **(Condicionais)** $C(x, y, z, w) = \begin{cases} z, & \text{se } x \subseteq y \\ w, & \text{caso contrário} \end{cases}$
4. **(Composições)** A função definida por
$$f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x}))$$
Com $h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$.
5. **(Recursões Limitadas na Notação)** A função definida por
$$\begin{array}{rcl} f(\epsilon, \bar{x}) & = & g(\bar{x}) \\ f(yi, \bar{x}) & = & h_i(y, \bar{x}, f(y, \bar{x}))_{|t(y,\bar{x})}, \quad i = 0, 1 \end{array}$$
Com $h_0, h_1, g \in \mathrm{Pt.1}$ e t função limitativa.

Prova de Pt.1 = PTIME

Prova de Pt.1 = PTIME

Lema

Se f é uma função n-ária tal que $f \in \mathrm{Pt.1}$ então existe um polinómio p_f tal que $\forall \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n$, $|f(\bar{x})| \leq p_f(|\bar{x}|)$.

Prova de Pt.1 = PTIME

Prova de Pt.1 = PTIME

$$Pt.1 \subseteq PTIME$$

Prova de Pt.1 = PTIME

Prova de Pt.1 = PTIME

2. $S_i(x) = xi,\ i = 0, 1$

Prova de Pt.1 = PTIME

2. $S_i(x) = xi,\ i = 0, 1$

Vamos assumir que:

Prova de Pt.1 = PTIME

2. $S_i(x) = xi,\ i = 0, 1$

Vamos assumir que:

- A informação referente a x encontra-se no início na fita;

Prova de Pt.1 = PTIME

2. $S_i(x) = xi,\ i = 0, 1$

Vamos assumir que:

- A informação referente a x encontra-se no início na fita;
- A fita terá, no final, a imagem da função;

Prova de Pt.1 = PTIME

2. $S_i(x) = xi,\ i = 0, 1$

Vamos assumir que:

- A informação referente a x encontra-se no início na fita;
- A fita terá, no final, a imagem da função;
- No início, a cabeça de leitura encontra-se no início da informação da fita

Prova de Pt.1 = PTIME

Prova de Pt.1 = PTIME

2. $S_i(x) = xi, \; i = 0, 1$

Prova de Pt.1 = PTIME

2. $S_i(x) = xi,\ i = 0, 1$

M_{S_i} máquina de Turing com uma fita, $Q_{S_i} = \{q_0, q_1\}$:

Prova de Pt.1 = PTIME

2. $S_i(x) = xi, \; i = 0, 1$

M_{S_i} máquina de Turing com uma fita, $Q_{S_i} = \{q_0, q_1\}$:

Lê	Executa
$q_0 \; 0$	$q_0 \; 0 \; R$
$q_0 \; 1$	$q_0 \; 1 \; R$
$q_0 \; B$	$q_1 \; i \; R$

Prova de Pt.1 = PTIME

2. $S_i(x) = xi, \ i = 0, 1$

M_{S_i} máquina de Turing com uma fita, $Q_{S_i} = \{q_0, q_1\}$:

Lê	Executa
$q_0 \ 0$	$q_0 \ 0 \ R$
$q_0 \ 1$	$q_0 \ 1 \ R$
$q_0 \ B$	$q_1 \ i \ R$

$\mathrm{time}_{M_{S_i}}(x) = |x| + 1$

Prova de Pt.1 = PTIME

2. $S_i(x) = xi,\ i = 0, 1$

M_{S_i} máquina de Turing com uma fita, $Q_{S_i} = \{q_0, q_1\}$:

Lê	Executa
q_0 0	q_0 0 R
q_0 1	q_0 1 R
q_0 B	q_1 i R

$\mathrm{time}_{M_{S_i}}(x) = |x| + 1$

$$S_i \in PTIME$$

Prova de Pt.1 = PTIME

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, \ldots, g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, ..., g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

$h, g_1, ..., g_m \in PTIME$

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, \ldots, g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

$h, g_1, \ldots, g_m \in PTIME$

Máquina de Turing M_h com m fitas, polinómio p_h:

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, ..., g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

$h, g_1, ..., g_m \in PTIME$

Máquina de Turing M_h com m fitas, polinómio p_h:

$\mathrm{time}_{M_h}(\bar{y}) \leq p_h(|\bar{y}|), \forall \bar{y} \in (\{0,1\}^*)^m$

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, ..., g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

$h, g_1, ..., g_m \in PTIME$

Máquina de Turing M_h com m fitas, polinómio p_h:

$\mathrm{time}_{M_h}(\bar{y}) \leq p_h(|\bar{y}|), \forall \bar{y} \in (\{0,1\}^*)^m$

Máquinas de Turing $M_{g_1}, ..., M_{g_m}$ de uma fita, polinómios $p_{g_1}, ..., p_{g_m}$:

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, ..., g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

$h, g_1, ..., g_m \in PTIME$

Máquina de Turing M_h com m fitas, polinómio p_h:

$\mathrm{time}_{M_h}(\bar{y}) \leq p_h(|\bar{y}|), \forall \bar{y} \in (\{0,1\}^*)^m$

Máquinas de Turing $M_{g_1}, ..., M_{g_m}$ de uma fita, polinómios $p_{g_1}, ..., p_{g_m}$:

$\mathrm{time}_{M_{g_i}}(\bar{x}) \leq p_{g_i}(|\bar{x}|), \forall \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n, \forall i \in X_m$

$(X_m = \{1, 2, ..., m\})$

Prova de Pt.1 = PTIME

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, ..., g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, \dots, g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

$$Q_h = \{q_0^h, \dots, q_k^h\}, \quad Q_{g_i} = \{q_0^{g_i}, \dots, q_{n_i}^{g_i}\}, \quad \forall i \in X_m$$

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, \ldots, g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

$$Q_h = \{q_0^h, \ldots, q_k^h\}, \quad Q_{g_i} = \{q_0^{g_i}, \ldots, q_{n_i}^{g_i}\}, \quad \forall i \in X_m$$

$$M_h : q_0^h \bar{y} \vdash \ldots \vdash q_{\bar{x}}^h h(\bar{y}), \quad \forall \bar{y} \in (\{0,1\}^*)^m$$

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, \ldots, g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

$$Q_h = \{q_0^h, \ldots, q_k^h\}, \quad Q_{g_i} = \{q_0^{g_i}, \ldots, q_{n_i}^{g_i}\}, \quad \forall i \in X_m$$

$$M_h : q_0^h \bar{y} \vdash \ldots \vdash q_{\bar{x}}^h h(\bar{y}), \quad \forall \bar{y} \in (\{0,1\}^*)^m$$

$$M_{g_i} : q_0^{g_i} \bar{x} \vdash \ldots \vdash q_{\bar{x}}^{g_i} g_i(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n, \quad \forall i \in X_m$$

Prova de Pt.1 = PTIME

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, ..., g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, \ldots, g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

M_g: Computa em cada fita i a imagem de g_i.

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, \ldots, g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

M_g: Computa em cada fita i a imagem de g_i.

$Q_g = \{q_{q^{g_1}_{k_1},\ldots,q^{g_m}_{k_m}} : q^{g_i}_{k_i} \in Q_{g_i} \dot\cup \{q^{g_i}_{n_i+1}\}, \forall i \in X_m\} \setminus$
$\setminus \{q_{q^{g_1}_{n_1+1},\ldots,q^{g_m}_{n_m+1}}\}$

Prova de Pt.1 = PTIME

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, \ldots, g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, ..., g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

$q^{g_1}_{k_1} \in Q_{g_1} \dot{\cup} \{q^{g_1}_{n_1+1}\}, ..., q^{g_m}_{k_m} \in Q_{g_m} \dot{\cup} \{q^{g_m}_{n_m+1}\}$
(tais que $\exists p \in X_m : q^{g_p}_{k_p} \neq q^{g_p}_{n_p+1}$)

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, \dots, g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

$q_{k_1}^{g_1} \in Q_{g_1} \dot{\cup} \{q_{n_1+1}^{g_1}\}, \dots, q_{k_m}^{g_m} \in Q_{g_m} \dot{\cup} \{q_{n_m+1}^{g_m}\}$
(tais que $\exists p \in X_m : q_{k_p}^{g_p} \neq q_{n_p+1}^{g_p}$)

$$\delta_g(q_{q_{k_1}^{g_1},\dots,q_{k_m}^{g_m}}, \bar{s}) = (q_{q_{k'_1}^{g_1},\dots,q_{k'_m}^{g_m}}, \bar{t}, \overline{M})$$

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, \ldots, g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

$q_{k_1}^{g_1} \in Q_{g_1} \dot{\cup} \{q_{n_1+1}^{g_1}\}, \ldots, q_{k_m}^{g_m} \in Q_{g_m} \dot{\cup} \{q_{n_m+1}^{g_m}\}$
(tais que $\exists p \in X_m : q_{k_p}^{g_p} \neq q_{n_p+1}^{g_p}$)

$$\delta_g(q_{q_{k_1}^{g_1}, \ldots, q_{k_m}^{g_m}}, \bar{s}) = (q_{q_{k'_1}^{g_1}, \ldots, q_{k'_m}^{g_m}}, \bar{t}, \overline{M})$$

Se $\exists\, D, U \quad D \neq \emptyset$:

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, \ldots, g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

$q^{g_1}_{k_1} \in Q_{g_1} \dot{\cup} \{q^{g_1}_{n_1+1}\}, \ldots, q^{g_m}_{k_m} \in Q_{g_m} \dot{\cup} \{q^{g_m}_{n_m+1}\}$
(tais que $\exists p \in X_m : q^{g_p}_{k_p} \neq q^{g_p}_{n_p+1}$)

$$\delta_g(q_{q^{g_1}_{k_1}, \ldots, q^{g_m}_{k_m}}, \bar{s}) = (q_{q^{g_1}_{k'_1}, \ldots, q^{g_m}_{k'_m}}, \bar{t}, \overline{M})$$

Se $\exists\, D, U \quad D \neq \emptyset$:

- $i \in D$ se $\delta_{g_i}(q^{g_i}_{k_i}, s_i) = (q^{g_i}_{k'_i}, t_i, M_i)$ se encontra definido
- $i \in U$ caso contrário, sendo neste caso $k'_i = n_i + 1$, $M_i = H$ e $t_i = s_i$.

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, \ldots, g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

$q^{g_1}_{k_1} \in Q_{g_1} \dot{\cup} \{q^{g_1}_{n_1+1}\}, \ldots, q^{g_m}_{k_m} \in Q_{g_m} \dot{\cup} \{q^{g_m}_{n_m+1}\}$
(tais que $\exists p \in X_m : q^{g_p}_{k_p} \neq q^{g_p}_{n_p+1}$)

$$\delta_g(q_{q^{g_1}_{k_1}, \ldots, q^{g_m}_{k_m}}, \bar{s}) = (q_{q^{g_1}_{k'_1}, \ldots, q^{g_m}_{k'_m}}, \bar{t}, \overline{M})$$

Se $\exists\, D, U \quad D \neq \emptyset$:

- $i \in D$ se $\delta_{g_i}(q^{g_i}_{k_i}, s_i) = (q^{g_i}_{k'_i}, t_i, M_i)$ se encontra definido
- $i \in U$ caso contrário, sendo neste caso $k'_i = n_i + 1$, $M_i = H$ e $t_i = s_i$.

$(\bar{s} = (s_1, \ldots, s_m), \quad \bar{t} = (t_1, \ldots, t_m), \quad \overline{M} = (M_1, \ldots, M_m))$

Prova de Pt.1 = PTIME

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, \ldots, g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, \ldots, g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

Máquina de Turing M_f com m fitas

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, \ldots, g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

Máquina de Turing M_f com m fitas

$$Q_h = \{q_0^h, \ldots, q_k^h\}, \quad Q_g = \{q_0^g, \ldots, q_l^g\}$$

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, \dots, g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

Máquina de Turing M_f com m fitas

$Q_h = \{q_0^h, \dots, q_k^h\}, \quad Q_g = \{q_0^g, \dots, q_l^g\}$

$Q_f = Q_h \dot{\cup} Q_g$ estados da máquina M_f

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, \dots, g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

Máquina de Turing M_f com m fitas

$Q_h = \{q_0^h, \dots, q_k^h\}, \quad Q_g = \{q_0^g, \dots, q_l^g\}$

$Q_f = Q_h \dot{\cup} Q_g$ estados da máquina M_f
$i \in X_m$

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, ..., g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

Máquina de Turing M_f com m fitas

$Q_h = \{q_0^h, ..., q_k^h\}, \quad Q_g = \{q_0^g, ..., q_l^g\}$

$Q_f = Q_h \dot{\cup} Q_g$ estados da máquina M_f
$i \in X_m$

$$\delta_f(q_i^g, \bar{s}) = \begin{cases} \delta_g(q_i^g, \bar{s}), & \text{se } \delta_g(q_i^g, \bar{s}) \text{ se encontra definido} \\ (q_0^h, \bar{s}, \overline{H}), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, \ldots, g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

Máquina de Turing M_f com m fitas

$Q_h = \{q_0^h, \ldots, q_k^h\}, \quad Q_g = \{q_0^g, \ldots, q_l^g\}$

$Q_f = Q_h \dot{\cup} Q_g$ estados da máquina M_f
$i \in X_m$

$$\delta_f(q_i^g, \bar{s}) = \begin{cases} \delta_g(q_i^g, \bar{s}), & \text{se } \delta_g(q_i^g, \bar{s}) \text{ se encontra definido} \\ (q_0^h, \bar{s}, \overline{H}), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$\delta_f(q_i^h, \bar{s}) = \delta_h(q_i^h, \bar{s})$

$(\bar{s} = (s_1, \ldots., s_m), \quad \overline{H} = (H, \ldots, H) \in \{H\}^m)$

Prova de Pt.1 = PTIME

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, \dots, g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, \ldots, g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

$$M_f : q_0^g \bar{x} \vdash \ldots \vdash q_{\bar{x}}^h f(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n$$

Prova de Pt.1 = PTIME

4. $f(\bar{x}) = h(\bar{g}(\bar{x})), \quad h, \bar{g} \in \mathrm{Pt.1}$
   $(\bar{g} = (g_1, \ldots, g_m), \quad \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n)$

$$M_f : q_0^g \bar{x} \vdash \ldots \vdash q_{\bar{x}}^h f(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n$$

$$\begin{aligned} \mathrm{time}_{M_f}(\bar{x}) &\leq \max_{i=1,\ldots,m} p_{g_i}(|\bar{x}|) + 1 + p_h(|\bar{g}(\bar{x})|) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} p_{g_i}(|\bar{x}|) + 1 + p_h(p_{\bar{g}}(|\bar{x}|)) \end{aligned}$$

com $|\bar{g}(\bar{x})| \leq p_{\bar{g}}(|\bar{x}|), \forall \bar{x} \in (\{0,1\}^*)^n$.

Prova de Pt.1 = PTIME

Prova de Pt.1 = PTIME

5. $f(\epsilon, \bar{x}) = g(\bar{x})$
   $f(yi, \bar{x}) = h_i(y, \bar{x}, f(y, \bar{x}))_{|t(y,\bar{x})}, \quad i = 0, 1$
   $h_0, h_1, g \in \mathrm{Pt.1}$, t função limitativa.

Prova de Pt.1 = PTIME

5. $f(\epsilon, \bar{x}) = g(\bar{x})$
   $f(yi, \bar{x}) = h_i(y, \bar{x}, f(y, \bar{x}))_{|t(y,\bar{x})}, \quad i = 0, 1$
   $h_0, h_1, g \in \mathrm{Pt.1}$, t função limitativa.

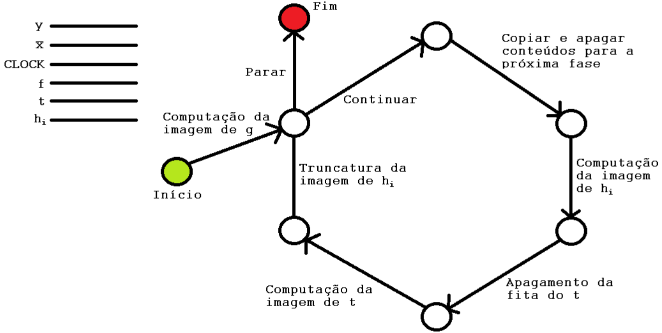


Figure: Ideia intuitiva da construção da máquina de Turing da recursão limitada na notação

Prova de Pt.1 = PTIME

Prova de Pt.1 = PTIME

$$PTIME \subseteq Pt.1$$

Porque uma função limitativa?

Porque uma função limitativa?

Porque uma função limitativa?

$$
\begin{aligned}
f(\epsilon, x) &= x \\
f(yi, x) &= f(y,x)\frown f(y,x), \quad i = 0,1
\end{aligned}
$$

Porque uma função limitativa?

$$\begin{aligned} f(\epsilon, x) &= x \\ f(yi, x) &= f(y,x) ^\frown f(y,x), \quad i = 0,1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\epsilon, x) &= \pi_1^1(x) \\ f(yi, x) &= \wedge(\pi_3^3(y, x, f(y,x)), \pi_3^3(y, x, f(y,x))), \quad i = 0,1 \end{aligned}$$

Porque uma função limitativa?

Porque uma função limitativa?

$$\wedge(y,x) = x\frown y$$

$x\frown\epsilon = x$

$i \in \{0,1\} \quad , x\frown(yi) = (x\frown y)\frown i$

$$\begin{aligned} \wedge(\epsilon,x) &= \pi_1^1(x) \\ \wedge(yi,x) &= S_i(\pi_3^3(y,x,\wedge(y,x)))_{|xy0}, \quad i = 0,1 \end{aligned}$$

$$\wedge \in Pt.1$$

Porque uma função limitativa?

Porque uma função limitativa?

$$
\begin{aligned}
f(\epsilon, x) &= x \\
f(yi, x) &= f(y, x)\frown f(y, x), \quad i = 0, 1
\end{aligned}
$$

Porque uma função limitativa?

$$
\begin{aligned}
f(\epsilon, x) &= x \\
f(yi, x) &= f(y, x)^\frown f(y, x), \quad i = 0, 1
\end{aligned}
$$

$|y| = 0$ (ou seja, $y = \epsilon$), $\quad |f(\epsilon, x)| = |x|$

Porque uma função limitativa?

$$
\begin{aligned}
f(\epsilon, x) &= x \\
f(yi, x) &= f(y, x)\frown f(y, x), \quad i = 0, 1
\end{aligned}
$$

$|y| = 0$ (ou seja, $y = \epsilon$), $\quad |f(\epsilon, x)| = |x|$

Hipótese: $|f(y, x)| = 2^{|y|}|x|$

Porque uma função limitativa?

$$\begin{aligned} f(\epsilon, x) &= x \\ f(yi, x) &= f(y,x)^\frown f(y,x), \quad i = 0,1 \end{aligned}$$

$|y| = 0$ (ou seja, $y = \epsilon$), $\quad |f(\epsilon, x)| = |x|$

Hipótese: $|f(y,x)| = 2^{|y|}|x|$

$$\begin{aligned} |f(yi, x)| &= |f(y,x)^\frown f(y,x)| \\ &= |f(y,x)| + |f(y,x)| \\ &= 2^{|y|}|x| + 2^{|y|}|x| \\ &= 2^{|y|+1}|x| \\ &= 2^{|yi|}|x| \end{aligned}$$

Porque uma função limitativa?

$$\begin{aligned} f(\epsilon, x) &= x \\ f(yi, x) &= f(y,x)\frown f(y,x), \quad i = 0, 1 \end{aligned}$$

$|y| = 0$ (ou seja, $y = \epsilon$), $\quad |f(\epsilon, x)| = |x|$

Hipótese: $|f(y,x)| = 2^{|y|}|x|$

$$\begin{aligned} |f(yi, x)| &= |f(y,x)\frown f(y,x)| \\ &= |f(y,x)| + |f(y,x)| \\ &= 2^{|y|}|x| + 2^{|y|}|x| \\ &= 2^{|y|+1}|x| \\ &= 2^{|yi|}|x| \end{aligned}$$

$|f(y,x)| = 2^{|y|}|x|$

A classe de Bellantoni e Cook

A classe de Bellantoni e Cook

A classe de Bellantoni e Cook

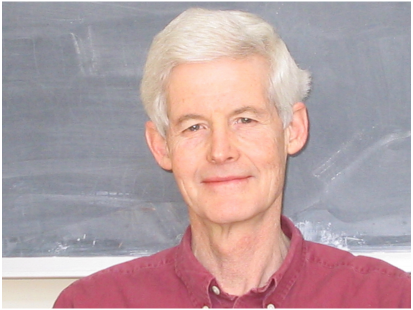


Figure: Stephen Cook

Heath, Y. (n.d.). [Photograph]. Stephen A. Cook. http://www.cs.toronto.edu/ sacook/

A classe de Bellantoni e Cook

A classe de Bellantoni e Cook

$$f(\bar{x}; \bar{y})$$

A classe de Bellantoni e Cook

A classe de Bellantoni e Cook

B: A mais pequena classe construída por

A classe de Bellantoni e Cook

B: A mais pequena classe construída por

1. **(Projeções)** $\pi_j^{n,m}(x_1, \ldots, x_n; x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = x_j$, $1 \leq j \leq n + m$

A classe de Bellantoni e Cook

B: A mais pequena classe construída por

1. **(Projeções)** $\pi_j^{n,m}(x_1, \ldots, x_n; x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = x_j$, $1 \leq j \leq n + m$
2. **(Sucessores)** $S_i(; x) = xi$, $i = 0, 1$

A classe de Bellantoni e Cook

B: A mais pequena classe construída por

1. **(Projeções)** $\pi_j^{n,m}(x_1, \ldots, x_n; x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = x_j$, $1 \leq j \leq n+m$
2. **(Sucessores)** $S_i(; x) = xi$, $i = 0, 1$
3. **(Condicionais)** $Q(; x, y, z, w) = \begin{cases} z, & \text{se } x \subseteq y \\ w, & \text{caso contrário} \end{cases}$

A classe de Bellantoni e Cook

B: A mais pequena classe construída por

1. **(Projeções)** $\pi_j^{n,m}(x_1,\ldots,x_n;x_{n+1},\ldots,x_{n+m}) = x_j$, $1 \leq j \leq n+m$
2. **(Sucessores)** $S_i(;x) = xi$, $i = 0,1$
3. **(Condicionais)** $Q(;x,y,z,w) = \begin{cases} z, & \text{se } x \subseteq y \\ w, & \text{caso contrário} \end{cases}$
4. **(Predecessores)** $p(;\epsilon) = \epsilon$, $p(;xi) = x$, $i = 0,1$

A classe de Bellantoni e Cook

B: A mais pequena classe construída por

1. **(Projeções)** $\pi_j^{n,m}(x_1, \ldots, x_n; x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = x_j$, $1 \leq j \leq n + m$
2. **(Sucessores)** $S_i(; x) = xi,\ i = 0, 1$
3. **(Condicionais)** $Q(; x, y, z, w) = \begin{cases} z, \text{ se } x \subseteq y \\ w, \text{ caso contrário} \end{cases}$
4. **(Predecessores)** $p(; \epsilon) = \epsilon,\ p(; xi) = x,\ i = 0, 1$
5. **(Composições)** A função definida por

$$f(\bar{x}; \bar{y}) = h(\bar{r}(\bar{x};); \bar{g}(\bar{x}; \bar{y}))$$

Com $h, \bar{g}, \bar{r} \in \mathrm{B}$.

A classe de Bellantoni e Cook

2. **(Sucessores)** $S_i(;x) = xi,\ i = 0, 1$
3. **(Condicionais)** $Q(;x, y, z, w) = \begin{cases} z, & \text{se } x \subseteq y \\ w, & \text{caso contrário} \end{cases}$
4. **(Predecessores)** $p(;\epsilon) = \epsilon,\ p(;xi) = x,\ i = 0, 1$
5. **(Composições)** A função definida por
$$f(\bar{x};\bar{y}) = h(\bar{r}(\bar{x};);\bar{g}(\bar{x};\bar{y}))$$
Com $h, \bar{g}, \bar{r} \in \mathrm{B}$.
6. **(Recursões na Notação)** A função definida por
$$\begin{aligned} f(\epsilon, \bar{x};\bar{y}) &= g(\bar{x};\bar{y}) \\ f(zi, \bar{x};\bar{y}) &= h_i(z, \bar{x};\bar{y}, f(z, \bar{x};\bar{y})), \quad i = 0, 1 \end{aligned}$$
Com $h_0, h_1, g \in B$.

A seguir...