Exemplo da aula teórica 15.10.2018

1. Considere a seguinte equação não linear $\quad e^{x/4} = \dfrac{2}{x}, \quad (x > 0) \quad$ (1).

   (a) Prove que a equação (1) admite uma solução única, z, no intervalo $[1.3, 1.5]$. Comece por fazer uma análise gráfica (reescrevendo a equação numa forma + simples) e depois teórica.

   (b) Pretendemos aproximar z por um método do tipo ponto fixo. Para isso temos de reescrever a equação dada numa forma $x = g(x)$ de modo que z seja ponto fixo de g. Considere as funções

   $$g_1(x) = 2\, e^{-x/4}\,, \quad g_2(x) = 4\, ln(2/x)$$

   Comece por provar que z é ponto fixo de $g1$ e de $g2$. (Ver também ilustrações gráficas na última página).

   Solução:

   g_1

   z zero de f ou seja $e^{z/4} = \dfrac{2}{z} \Rightarrow e^{-z/4} = z/2 \Rightarrow 2e^{-z/4} = z \Rightarrow g_1(z) = z.$

   Analogamente para g_2, por aplicação de logaritmos:

   z zero de f ou seja $e^{z/4} = \dfrac{2}{z} \Rightarrow z/4 = \ln(\dfrac{2}{z}) \Rightarrow z = 4\ln(\dfrac{2}{z}) = g_2(z)$

   Agora faz sentido considerar os métodos associados

   $$x_{n+1} = 2\, e^{-x_n/4}\, (= g_1(x_n)), \quad x_{n+1} = 4\, ln(2/x_n)\, (= g_2(x_n))$$

   candidatos para serem usados para aproximar z. Falta verificar se convergem para z com algum x_0.

   (c) Prove que o método $x_{n+1} = 2\, e^{-x_n/4}$ converge para a raiz z, qualquer que seja x_0 escolhido em $[1.3, 1.5]$.

   Nota: mais à frente provaremos que o outro método diverge

   (d) Utilizando o método $x_{n+1} = 2\, e^{-x_n/4}$, considere $x_0 = 1.3$ e calcule as iteradas x_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Utilizando uma fórmula de erro "*à posteriori*" determine um majorante para $|z - x_2|$.

   Solução: Como conhecemos x_2, podemos utilizar

   $|z - x_{k+1}| \le \dfrac{L}{1-L}|x_{k+1} - x_k|$: Obtém-se: $\quad |z - x_2| \le \dfrac{L}{1-L}|x_2 - x_1| \approx 0.$

   OBS

   Como $g_1'(x) < 0$ a convergência é alternada. Assim, z estará sempre entre quaisquer 2 iteradas consecutivas. Notando que

   (e) Quantas iteradas teria de calcular para obter um erro inferior a 10^{-3}? Ou seja, tem-se $|z - x_m| \le 10^{-3}$ a partir de que valor m?

   Solução: $m = 6$. Pode utilizar uma das fórmulas (ver página 1 da Ficha 2)

   $$|z - x_k| \le L^k|x - x_0|, \qquad |x - x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

(f) Relativamente ao método da alínea anterior, determine a respetiva ordem de convergência e uma aproximação para o fator assimptótico da convergência. (*para os alunos resolverem a seguir à aula do dia 17!*)

Consideremos agora o método $x_{m+1} = g_2(x_m)$**. Já vimos que** z **é ponto fixo de** g_2**. A questão agora é saber se é possível utilizá-lo para aproximar** z.

(g) Com $x_0 = 1.3$, obtiveram-se (com o Mathematica) os seguintes resultados para a sucessão $x_{m+1} = g_2(x_m)$: $x_1 = 1.72313, x_2 = 0.596015, x_3 = 4.84254, x_4 = -3.53717$. Comente.

Solução: *Observa-se que não é possível calcular* $x_5 = 4\ln(2/x_4)$*! Os resultados indicam divergência em relação a* z.

(h) Indique uma prova analítica de que a sucessão gerada por g_2 não converge para z, qualquer que seja o $x_0 \neq z$. Como classifica o ponto fixo z para a função g_2?

Solução: Sendo $g_2'(x) = -4/x$ tem-se $|g_2'(1.3)| = 3.077 > 1$ e $|g_2'(1.5)| = 2.667 > 1$. Averiguemos se $|g_2'(z) > 1$. Tem-se $g_2''(x) = 4/x^2 > 0 \,\forall x \in I \Rightarrow g_2'$ é crescente logo $|g_2'|$ tb é monótona (agora decrescente) e resulta $|g_2'(x)| > 1$ em todos os pontos do intervalo I. Deste modo, como $z \in I$, fica garantido que $|g_2'(z) > 1|$, ou seja, verifica-se a condição de divergência.
O ponto fixo z diz-se *repulsor* para g_2.

Para os alunos completarem:

2. Mostre que o método de Newton aplicado a (1), começando com $x_0 = 1.3$, converge para a raiz z considerada.

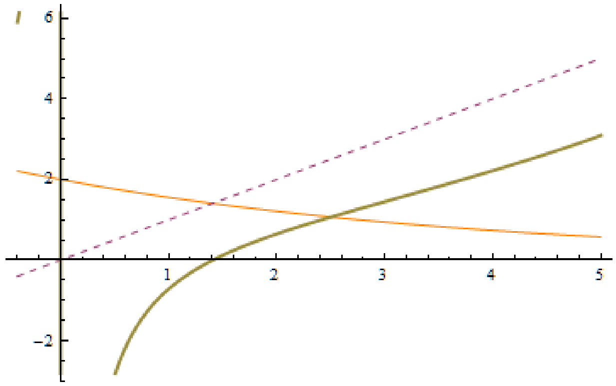
(a) Com $x_0 = 1.3$ calcule as iteradas x_1, x_2, x_3 do método de Newton.

(b) Determine um majorante para o erro absoluto de x_2, isto é, para $|z - x_2|$.

Solução: Tem-se: $|z - x_2| \leq K(K(z-x_0)^2)^2 = K^3(z-x_0)^4$. Com $K = 0.6922$ e $|z - x_0| \leq 0.2$, obtém-se $|z - x_2| \leq 0.0005307$.

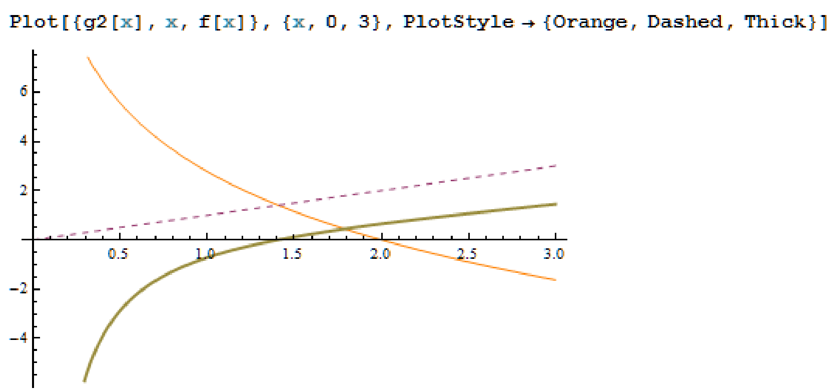
(c) Determine, justificando, a ordem de convergência do método de Newton. Determine ainda uma aproximação para o fator assimptótico de convergência (pode aproximar z pela iterada x_3).

Ilustrações gráficas (z é raiz de $f(x) = 0$ e é ponto fixo de g_1 e g_2)
Gráfico das funções f, g_1 e da reta $y = x$:



g1.png

Gráfico das funções f, g_2 e da reta $y = x$:



g2.png