Matemática Computacional
Ficha 4 (Capítulo 4)
Aproximações de funções
2018

I. Revisão da matéria/Formulário

• Interpolação Polinomial

Fórmula de Lagrange:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right) \qquad\qquad p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, l_i(x)$$

Fórmula de Newton com dif. divididas:

$$\begin{cases} f[x_j] = f(x_j), \quad j = 0, ..., n \\ f[x_j, ..., x_{j+k}] = \dfrac{f[x_{j+1}, ..., x_{j+k}] - f[x_j, ..., x_{j+k-1}]}{x_{j+k} - x_j}, \quad j = 0, ..., n-k, \quad k = 1, ..., n \end{cases}$$

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, ..., x_i](x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})$$

Fórmula de erro:

$$e_n(x) = f[x_0, \cdots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

• Mínimos Quadrados

$$\begin{bmatrix} (\phi_0, \phi_0) & \dots & (\phi_0, \phi_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\phi_m, \phi_0) & \dots & (\phi_m, \phi_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\phi_0, f) \\ \dots \\ (\phi_m, f) \end{bmatrix}$$

$$(\phi_i, \phi_j) = \sum_{k=0}^{n} \phi_i(x_k)\phi_j(x_k), \quad (\phi_i, f) = \sum_{k=0}^{n} \phi_i(x_k) f_k$$

II. Exercícios

II. 1 Interpolação polinomial

1. Na tabela seguinte são apresentados valores (considerados exactos) da função

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

x	0.8	1.0	1.6
$f(x)$	1.890	2.000	3.185

   (a) Obtenha a expressão do polinómio interpolador de f nos três pontos tabelados, através da fórmula de Lagrange.

   (b) Idem, mas através da fórmula de Newton.
   Solução b): $p_2(x) = 1.89 + 0.55(x - 0.8) + 1.78125(x - 0.8)(x - 1)$.

   (c) Calcule o valor interpolado para $x = 1.3$. Obtenha um majorante do erro a partir da expressão do erro de interpolação e compare-o com o erro efectivamente cometido.
   Solução: $p_2(1.3) = 2.4321875$; majorante para erro: $|e(1.3)| \leq 0.11$; valor exacto do erro absoluto é $|f(1.3) - p_2(1.3)| \simeq 0.027$, ou seja, cerca de 4 vezes inferior ao majorante; isso resulta de na majoração se usar $max|f'''(x)|, x \in [0.8, 1.6]$ no lugar de $|f'''(\xi)|$

2. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	3	4	2

   (a) Determine duas expressões para o polinómio $p_2(x)$ de grau ≤ 2 que interpola f nos pontos $0,\ 2,\ 4$ da tabela, utilizando as fórmulas de Lagrange e de Newton.

   Solução: por simplicidade sejam $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4$. Então, pela fórmula de Lagrange:
   $p_2(x) = l_0(x)f(x_0) + l_1(x)f(x_1) + l_2(x)f(x_2)$
   onde
   $l_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(0-2)(0-4)}, l_1(x) = \frac{(x-0)(x-4)}{(2-0)(2-4)}, l_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(4-0)(4-2)}$.
   Pela fórmula de Newton:
   $p_2(x) = f(0) + f[0, 2]x + f[0, 2, 4]x(x - 2)$
   onde as diferenças divididas podem ser calculadas fazendo uma tabela:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1		
		$f[x_0, x_1] = \frac{4-1}{2-0} = 3/2$	
2	4		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-1-3/2}{4-0}$ =-5/8
		$f[x_1, x_2] = \frac{2-4}{4-2}$ = -1	
4	2		

Finalmente, $p_2(x) = 1 + (3/2)x - (5/8)x(x-2)$

(b) Para aproximar $f(1.5)$ obtenha o valor $p_2(1.5)$. **Solução**: utilizando qualquer das expressões obtidas para p_2, já que representam o mesmo (único) polinómio, expresso em 2 bases diferentes, vem $p_2(1.5) = 3.7185$.

(c) Supondo que f tem a seguinte forma: $f(x) = exp(-x) + a_2x^2 + a_1x + a_0$, determine um majorante para o erro de interpolação $|f(1.5) - p_2(1.5)|$, onde p_2 é o polinómio obtido anteriormente (sem obter as constantes a_i).
Solução: Usando $\max_{[0,4]} |f''(x)| = \max_{[0,4]} exp(-x) = exp(0) = 1$ na fórmula do erro de interpolação, vem
$|f(1.5) - p_2(1.5)| \leq (1/6)|(1.5-0)(1.5-2)(1.5-4)| = 0.3125$

(d) Sabendo que $f[2,3,4] = 1$ e tendo em conta a alínea a) apenas, obtenha o polinómio p_3 que interpola f nos pontos $0,2,3,4$, à custa do polinómio p_2 já obtido.
Solução: com $x_3 = 3$, vem
$p_3(x) = p_2(x) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x2)$.
Note-se que não dispomos de $f(x_3)$, logo não podemos calcular diferenças onde esse valor seja requerido (como por ex, $f[x_2,x_3]$ e $f[x_1,x_2,x_3]$). Contudo, atendendo a que é dado $f[2,3,4] = 1$, podemos utilizar a fórmula
$f[0,2,4,3] = \dfrac{f[2,3,4] - f[0,2,4]}{3-0} = \dfrac{1+5/8}{3-0} = 13/24.$
Então, $p_3(x) = 1 + (3/2)x - (5/8)x(x-2) + (13/24)x(x-2)(x-4)$.

3. Considere a função f a que se refere a seguinte tabela:

x	-2	0	5
$f(x)$	3	9	-46

(a) Usando todos os pontos tabelados, determine uma aproximação de $f(3)$ pela fórmula de Newton.
Solução: A tabela de diferenças divididas para os pontos tabelados é

$$\begin{array}{cccc}
x_i & f(x_i) & f[\cdot,\cdot] & f[\cdot,\cdot,\cdot] \\
-2 & 3 & & \\
 & & 3 & \\
0 & 9 & & -2 \\
 & & -11 & \\
5 & -46 & &
\end{array}$$

e o polinómio interpolador fica $p_2(x) = 3 + 3(x+2) - 2(x+2)x$. Então

$$f(3) \approx p_2(3) = -12.$$

(b) Supondo que f é um polinómio de grau 3, determine o valor de x pertencente ao intervalo [-2,5] para o qual o erro (absoluto) de interpolação quadrática é máximo.
Solução:
Da fórmula de erro

$$e_2(x) = \frac{f'''(\xi(x))}{3!}(x+2)x(x-5)$$

e de f ser um polómio de grau 3, ou seja,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (a_i \in \mathbb{R},\, i = 0:3,\, a_3 \neq 0)$$

resulta

$$e_2(x) = a_3(x+2)x(x-5) = a_3(-10x - 3x^2 + x^3).$$

Como

$$e_2'(x) = 0 \Leftrightarrow -10-6x+3x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{3}(3-\sqrt{39}) = -1.08167,\ x_2 = \frac{1}{3}(3+\sqrt{39}) = 3.08167$$

e

$$|e_2(x_1)| = 6.0396|a_3|,\ |e_2(x_2)| = 30.0411|a_3|,$$

conclui-se que o erro absoluto de interpolação é máximo em $x_2 = \frac{1}{3}(1+\sqrt{39})$.

4. Considere a seguinte tabela de valores de uma função

x	-1	0	1	2
f(x)	1	1	1	2

   (a) Usando a fórmula de Newton com diferenças divididas, construa o polinómio interpolador de f de grau menor ou igual a três.

   (b) Sabendo que $f'''(x) = 4x - 1$, utilize a alínea anterior para determinar a expressão exacta de f.

5. Seja $f \in C^3[a,b]$ e p_2 o polinómio de grau menor ou igual a dois que interpola f nos pontos $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ e $x_2 = b$. Mostre que

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{(b-a)^3}{72\sqrt{3}} \max_{y\in[a,b]} |f^{(3}(y)|$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

6. Numa experiência de laboratório um aluno foi encarregue de medir a corrente eléctrica, I, dum dado circuito eléctrico. Fez apenas três medições, tendo obtido os seguintes valores

t	0	1	2	(s)
I(t)	2	1.8	1.5	(A)

   (a) Determine duas expressões para o polinómio $p(x)$ de grau ≤ 2 que interpola I nos pontos da tabela, utilizando a fórmula de Lagrange e de Newton.

   (b) Usando o polinómio interpolador de I nos pontos tabelados, qual seria o valor aproximado da corrente do circuito no instante 1.5 que este aluno poderia dar? Determine um majorante para o erro cometido sabendo que $|I^{(3)}(t)| \leq 0.1$ qualquer que seja $t > 0$.

   (c) Sabendo que um colega tinha medido um valor de 1.1 (A) para a corrente no instante 1.25, dê uma nova estimativa da corrente do circuito no instante 1.5, usando interpolação polinomial. Determine um majorante para o erro cometido sabendo que $|I^{(4)}(t)| \leq 0.2$ qualquer que seja $t > 0$.

   (d) Sabendo que I é um polinómio de grau quatro da forma

$$I(t) := t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d,$$

   determine uma expressão para I a partir do polinómio obtido na alínea anterior.

7. Pretende-se construir uma tabela de valores da função e^x, para $x \in [0,1]$, com pontos igualmente espaçados $x_j = jh, \quad j = 0, 1, ...N$, onde h é o espaçamento entre os pontos. Em cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ a função é aproximada pelo polinómio interpolador de grau menor ou igual a 1 nos pontos x_j, x_{j+1}. Determine o valor máximo do espaçamento h para que o erro de interpolação em qualquer ponto do intervalo $[0,1]$ seja inferior a 10^{-6}.

8. Considere a seguinte tabela de valores de uma funçãof

x_i	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
f_i	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

   (a) Obter $f(0.47)$ usando um polinómio de grau 2.

   (b) Admitindo que $f \in C^3([0,1])$e que $\max_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)| = M$, calcule um majorante do erro do resultado obtido na alínea anterior, em função de M.

9. Sejam $l_0(x)$, $l_1(x)$,..., $l_n(x)$ os polinómios de Lagrange de grau n associados aos nós x_0, x_1,..., x_n

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

   Considere a função

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) - 1$$

   Prove que

   (a) g é um polinómio de grau $\leq n$.

   (b) $g(x_i) = 0,\ i = 0, 1, ..., n$. *Atenda às propriedades dos* $l_j(x)$

   (c) $g(x) = 0$, para todo o x.

10. Considere a seguinte tabela de valores de uma função

x	-1	0	1	2
$f(x)$	1	0	1	16

   (a) Determine o polinómio interpolador de f, P_3, nos pontos da tabela pela fórmula interpoladora de Newton.

   (b) Pode-se mostrar que

$$\max_{x\in[-1,2]} |x(x-2)(x^2-1)| = 1.$$

   Sabendo que $|f^{(4}(x)| \leq 24$, para todo $x \in [-1, 2]$, obtenha um majorante para o erro

$$e_3(x) = f(x) - P_3(x),$$

   válido para todos os valores de $x \in [-1, 2]$.

11. Considere a seguinte tabela de valores:

x_i	-3	-1	1	3
f_i	-33	14	-2	-5

(a) Sabendo que a função tabelada é contínua e estritamente monótona em $[-1, 3]$, determine por **interpolação inversa** o zero da função situado no intervalo $[-1, 1]$, utilizando o maior número possível de pontos. Justifique a escolha dos nós de interpolação.

Solução: pretende-se o valor z tal que $f(z) = 0$, ou seja, pretende-se uma aproximação para $z = f^{-1}(0)$. Note que z deve estar entre -1 e 1. Seja $g(y) = f^{-1}(y)$. Faça uma tabela para a função g, "invertendo" a tabela dada. Determine um polinómio interpolador P_2 de g escolhendo convenientemente os pontos, tendo em conta que f é estritamente monótona em [-1, 3]. A designação de **interpolação inversa** tem a ver com o interpolar uma tabela "invertida".
Vem $P_2(y) = -1 - 0.125(y-14) + 0.02851(y-14)(y+2)$. No final vai obter $z \simeq P_2(0) = -0.0482464$.

(b) Outra maneira de aproximar o zero, z, de f é obter o polinómio interpolador de f, p_2, nos três últimos pontos, e usar o zero de p_2 no intervalo $[-1, 1]$. Determine esse zero e compare com o resultado obtido por interpolação inversa. Tente dar uma justificação.
Solução: O referido zero é 0.62664. Este valor é obviamente diferente do obtido por interpolação inversa, ou seja -0.0482464. Note-se que, mesmo quando a inversa $g(y) = f^{-1}(y)$ existe, o polinómio interpolador de g <u>não</u> é em geral o inverso do polinómio interpolador de f.

(c) Supondo que, para $x \geq -1$, a função é da forma

$$f(x) = 3x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

e que $f[-1, 1, 2] = 4$, escreva, recorrendo ao polinómio interpolador calculado na alínea anterior, uma expressão que permita obter $f(x)$.
Solução: Tem-se (é preciso justificar) $f(x) = p_3(x) + 3(x+1)(x-1)(x-3)(x-2); p_3(x) = p_2(x) - (19/8)\,(x+1)(x-1)(x-3)$

II. 2 Mínimos quadrados

1. Considere a seguinte tabela:

x_i	1.0	1.2	1.5	1.6
f_i	5.44	6.64	8.96	9.91

(a) Obtenha o polinómio do 1^o grau que se ajusta (no sentido dos mínimos quadrados) aos pontos tabelados.

Solução: $p_1(x) = -2.135933 + 7.451647x$

(b) Idem, mas para o polinómio do 2^o grau. Utilizando o polinómio obtido, determine uma estimativa do valor de $f(1.4)$.

Solução: $p_2(x) = 3.966473 - 2.244618x + 3.721460x^2$
$f(1.4) \simeq 8.1180694$.

(c) Relativamente aos dois casos anteriores, calcule o valor das somas dos quadrados dos desvios correspondentes aos ajustamentos efectuados.

Solução: grau 1: D= 0.06485; grau 2: D=0.00306

Qual seria o valor dessa soma, no caso de se fazer o ajustamento por um polinómio do 3^o grau?

2. Seja f uma função tal que $f(-2) = 3$, $f(0) = 6$ e $f(2) = 15$. Obtenha a função do tipo $g(x) = ax + b$ que melhor se ajusta aos valores dados, no sentido dos mínimos quadrados. Mostre ainda que:

$$\sum_{i=1}^{3}(f(x_i) - \alpha x_i - \beta)^2 \geq 6$$

para quaisquer α, β valores reais.

3. Considere a seguinte tabela de valores de uma função

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
f(x)	1	0.5	-1	0

(a) Obtenha a função do tipo

$$g(x) = a + b\sin(x) + c\cos(x)$$

que melhor aproxima f no sentido dos mínimos quadrados e determine

$$Q = \sum_{j=0}^{3}(f(x_j) - g(x_j))^2.$$

(b) Seja

$$Q_1 = \sum_{j=0}^{3}(f(x_j) - d\cos(x_j))^2.$$

Justifique que para todo $d \in \mathbb{R}$

$$Q_1 > 0.0625,$$

4. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	6	3	2	1

Pretende-se um ajustamento dos pontos da tabela por uma função do tipo

$$g(x) = \frac{1}{Ax + B}.$$

Determine as constantes A, B pelo método dos mínimos quadrados.

Solução

Note que $g(x)$ não é da forma $\alpha_0\phi_0(x) + \alpha_1\phi_1(x)$, ou seja, não se trata dum ajustamento linear. Contudo, como a função $G(x) = 1/g(x) = Ax + B$ é da forma acima, pode considerar o novo problema de aproximar a tabela de pontos $F_i = 1/f_i$ por $G = 1/g$. Construa a aproximação G pelo critério dos mínimos quadrados. Em seguida, conclua que $A = 11/30$ e $B = 4/15$.

5. Considere a seguinte tabela de valores de uma função

x	-1	-0.5	0	1
f(x)	0.262087	1.20472	1.34375	0.0130539

   (a) Calcule (com o auxilio do Mathematica) os valores das constantes a, b que minimizam o funcional

$$D(a,b) = \sum_{j=0}^{4} (f_j - ae^{bx_j})^2.$$

   Sugestão: escreva o sistema (não linear) que se obtem igualando a zero as derivadas parciais de $D(a,b)$ em ordem a a, b. Utilize o método de Newton para sistemas não lineares.

   (b) Proponha um modo de "linearizar" o problema.
   Sugestão: Por aplicação de logaritmos, transforme o problema num de determinar $G(x) = A + Bx$ que se ajusta a uma tabela modificada no sentido dos minimos quadrados.

6. Determine a função da forma

$$g(x) = Be^x + Ce^{-x}$$

que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, à seguinte tabela de valores

x_i	0	0.5	1.0
f_i	5.0	5.2	6.5

Para simplificar os cálculos, escreva os elementos da matriz usando arredondamento simétrico e uma casa decimal.

Solução: $B = 1.9905518$, $C = 3.0490127$

7. Considere a função f a que se refere a seguinte tabela:

x	-2	0	5
$f(x)$	3	9	-46

Obtenha a função do tipo $g(x) = 2x^3 + c_1x^2 + c_0$ que melhor se ajusta aos valores tabelados no sentido dos mínimos quadrados.

Solução:
Notemos que se pretendem os valores de $c_0, c_1 \in \mathbf{R}$ que tornam mínima a soma

$$D(c_0, c_1) = \sum_{i=0}^{2} (f(x_i) - 2x_i^3 - c_0 - c_1x_i^2)^2$$

Separando a parte que contem os parâmetros c_0, c_1 (as variáveis) do resto, vemos que o problema se reduz a ajustar uma função da forma $\tilde{g}(x) = c_0 + c_1x^2$ à função $\tilde{f}(x) := f(x) - 2x^3$. Consideremos então a nova tabela

x	-2	0	5
$\tilde{f}(x)$	19	9	-296

e as funções de base $\phi_0(x) := 1$ e $\phi_1(x) := x^2$. O sistema normal fica

$$\begin{bmatrix} 3 & 29 \\ 29 & 641 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -268 \\ -7324 \end{bmatrix}$$

cuja solução é $c_0 = 37.5305$, $c_1 = -13.1238$.