Matemática Computacional
Ficha 2 (Capítulo 2)
Métodos iterativos para equações não lineares
2018/19

I. Revisão da matéria/Formulário

Método da bissecção: $x_{k+1} = \dfrac{a_k + b_k}{2}, \quad f(a_k)f(b_k) < 0$

$$|z - x_{k+1}| \le |x_{k+1} - x_k|, \qquad |z - x_k| \le \frac{b-a}{2^k}$$

Método do ponto fixo: $x_{k+1} = g(x_k)$

$$|z - x_{k+1}| \le \frac{L}{1-L}|x_{k+1} - x_k|,$$

$$|z - x_k| \le L^k |z - x_0|, \qquad |z - x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

Notação: $e_k = z - x_k$ designa erro da iterada x_k

$$e_{k+1} = \frac{(-1)^{p-1} g^{(p)}(\xi_k)}{p!} e_k^p \qquad \xi_k \in \operatorname{int}(z, x_k)$$

$$g^{(r)}(z) = 0,\ r = 1, \ldots, p-1,\ g^{(p)}(z) \neq 0$$

Método de Newton: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$$z - x_{k+1} = -\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}(z - x_k)^2,\ \xi_k \in \operatorname{int}(z, x_k),$$

$$|z - x_{k+1}| \le K(z - x_k)^2, \quad K = \frac{\max|f''(x)|}{2\min|f'(x)|}$$

$$|z - x_k| \le \frac{1}{K}\left(K|z - x_0|\right)^{2^k},$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|z - x_{k+1}|}{(z - x_k)^2} = \frac{|f''(z)|}{2|f'(z)|}$$

Método da secante: $x_{k+1} = x_k - f(x_k)\dfrac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$

$$z - x_{k+1} = -\frac{f''(\xi_k)}{2f'(\eta_k)}(z - x_k)(z - x_{k-1}) \ (\xi_k, \eta_k \text{ num intervalo que contém } z, x_k \text{ e } x_{k-1})$$

$$|z - x_{k+1}| \le K\,|x - x_k|\,|z - x_{k-1}|,$$

II. Exercícios

II. 1 Método da bissecção

1. Seja $f(x) = -0.6x^2 + 2.4x + 5.5$.

   (a) Determine os zeros reais de f usando a fórmula resolvente.

   (b) Aproxime o maior zero, z, de f pelo método da bissecção: considere a terceira iterada e $x_0 = 5$ como aproximação inicial. Compare os erros estimados do método com o erro real.
   Solução: (b) $x_1 = 5.5,\ x_2 = 5.75,\ x_3 = 5.625$
   Erro real $|z - x_3| = 3.5 \times 10^{-3}$;
   Majorante pela fórmula: $|z - x_3| \leq 0.125$ (estimativa pessimista)

2. Num dado circuito elétrico, a voltagem V e a corrente I estão relacionadas pelas seguintes equações:

$$I = A(e^{BV} - 1), \quad C = DI + V,$$

   onde A, B, C, D são constantes que se supõem conhecidas. Assuma que $A.D = 14.3$, $C = 12$ e $D = B = 2$.

   (a) Obtenha uma equação não linear para a voltagem V, ou seja, da forma $f(V) = 0$. **Sugestão**: utilize a igualdade $I = (C - V)/D$; $f(V) = 14.3e^{BV} + V - 26.3$

   (b) Verifique que esta equação tem uma única raiz V pertencente ao intervalo $[0, 0.5]$ e obtenha um valor aproximado de V pelo método da bissecção com erro inferior a 0.05.

   (c) Use Mathlab (ou Mathematica, etc.) para obter uma aproximação com erro inferior a 10^{-8}.

3. Considere a equação

$$\cos x - x = 0.$$

   (a) Prove que esta equação tem uma única raiz $z \in [0.7, 0.8]$.

   (b) Efectue 4 iterações pelo método da bissecção (ou seja, obtenha x_1, x_2, x_3, x_4) e indique um novo intervalo que contenha z.
   Solução: $x_4 = 0.74375$; $z \in I_4 = [0.7375, 0.74375]$

   (c) Calcule um majorante para o erro absoluto de x_2, ou seja, para $|z - x_2|$.
   Solução: *utilizando a fórmula de erro do método* $|z - x_k| \leq (b - a)/2^k$*, onde* $[a, b]$ *é o intervalo inicial, obtém-se* $|z - x_2| \leq 0.025$. *Note que esta fórmula permite estimar o erro de* x_k*, sem termos de calcular* x_k.

   (d) A partir da fórmula de erro acima, determine o número k de iterações necessárias para garantir $|z - x_k| < \epsilon$, com $\epsilon = 10^{-4}$.
   Solução: *basta impor* $(b-a)/2^k < \epsilon$. *Conclua que, a partir de* $k = 10$*, temos a garantia de* x_k *satisfazer a precisão requerida.*

4. A velocidade de um pára-quedas pode ser determinada pela equação

$$v(t) = \frac{gM}{c}\left(1 - e^{-(c/M)t}\right),$$

onde g designa a aceleração da gravidade, M a massa, e c é o coeficiente de resistência ao ar. Supondo que $c = 15Kg/s$, calcule pelo método da bissecção um valor aproximado da massa M para que $v(9) = 35m/s$. Use quatro iteradas. Obtenha uma estimativa do erro cometido. Use Mathlab (ou Mathematica, etc.) para obter uma aproximação com erro inferior a 10^{-5}. Repita com 10^{-10}. Comente.

5. Uma empresa estima que o lucro (em euros) da produção de x miligramas de um solvente é dada pela função:

$$L(x) := x^5 + 3x^3 - x.$$

Aproxime, pelo método da bissecção com um erro inferior a 0.01, a quantidade de solvente que é necessário vender de modo a garantir um lucro de 1000 euros.

6. O volume V dum líquido num tanque esférico de rádio r está relacionado com a altura h ocupada pelo líquido através da expressão

$$V = \frac{\pi h^2(3r - h)}{3}.$$

Determine uma aproximação para h, pelo método da bissecção, com um erro inferior a 10^{-3}, com $V = 0.5$ m^3 e $r = 1$ m.

7. Considere a equação $\quad 3x^2 - e^x = 0$

   (a) Prove que a equação tem uma única raiz $z \in [0, 1]$.
   Sugestão.: Um gráfico com base na igualdade $3x^2 = e^x$ *sugere a existência duma raiz em* $[0, 1]$. *Faça um estudo da função* $f(x) = 3x^2 - e^x$
   Solução.: *Tem-se* $f(0) = -1$, $f(1) = 0.2817$. *Então, pelo Teorema de Bolzano existe pelo menos uma raiz em* $I =]0, 1[$. *É única? Como* $f'[0] = -1, f'[1.] = 3.281$, *logo* f' *tem pelo menos um zero em* I *e, sendo* $f''(x) = 6 - e^x > 0$ *em* I *(tem apenas um zero em* $x = 1.579 > 1$*), então* f' *é crescente, e tem um único zero* α, *em* I. *Também se conclui que* $f' < 0$ *entre 0 e alpha e* $f' > 0$ *de* α *a 1. Então* f *é decrescente de 0 a* α *e crescente de* α *a 1. Podemos concluir que existe um único zero de* f *em* I. *Note que o gráfico de* f *tem o sentido da concavidade voltada para cima.*

   (b) Determine um intervalo de comprimento igual a 0.1 que contenha z. Calcule um majorante para o erro da iterada x_{10} que se obteria pelo método da bissecção (não calcule x_{10}).

8. O fator de atrito F (adimensional) no escoamento dum fluido no interior dum tubo é dado pela equação de Colebrook-White

$$\frac{1}{\sqrt{F}} = -0.86 \ln\left(\frac{K}{3.7D} + \frac{2.51}{R_e\sqrt{F}}\right)$$

onde K é a rugosidade da parede do tubo (m), R_e é o número de Reynolds (adimensional) e D é o diâmetro interno do tubo (m). Suponha que $R_e = 10^5$ e que $K/D = 10^{-4}$ e calcule aproximadamente F, pelo método da bissecção (usando 3 iteradas) aplicado no intervalo $[0.01, 0.02]$. Estimativa do erro cometido?

II.2 Método do ponto fixo

1. (Teste Janeiro 2017) Considere a função

$$f(x) = \ln(1 + 2x) - e^{-x}$$

Sabe-se que a equação $f(x) = 0$ tem uma única raiz $z \in (0.4, 0.6)$. Pretende-se aproximar z por um método iterativo da forma $x_{n+1} = g(x_n)$, $n \in \mathbf{N}_0$.

i) No caso de $g(x) = x - f(x)$, mostre que, começando com $x_0 = 0.5$, o método associado a g converge para z.

Solução: Seja $g(x) := x - \ln(1 + 2x) + e^{-x}$. Sendo g contínua em $\mathbf{R}$, se o método associado a g convergir, o limite é um ponto fixo. É preciso assegurar que z é ponto fixo de g, o que é verdade: $g(z) = z - f(z) = z - 0 = z$. Para provar que o método converge com $x_0 = 0.5$ é suficiente que se verifiquem as condições do teorema do ponto fixo em $I = [0.4, 0.5]$ (na verdade, $g(0.6) = 0.360354 < 0.4$ levou a esta escolha em vez de $[0.4, 0.6]$). Tem-se $g'(x) = 1 - \exp(-x) - \dfrac{2}{1 + 2x}$, $\quad g \in C^1(I)$. Vejamos as outras condições.

- $g(I) \subset I$
  $g(0.4) = 0.482533 \in I$ e $g(0.5) = 0.413383 \in I$ Tem-se $g'(x) \leq 0, \ x \in I$, pois $g'(0.4) = -0.781431, \ g'(0.5) = -0.606531, \ g''(x) = \exp(-x) + 4/(1 + 2x)^2 > 0$.
  Então g decrescente $\Rightarrow 0.41338 = g(0.5) \leq g(x) \leq g(0.4) = 0.482533, \forall x \in I$.
- $\max|g'(x)| = L < 1, \quad x \in I$.
  Como $g''(x) > 0, \ x \in I$, então g' decrescente e, sendo negativa, então$|g'|$ crescente, donde resulta que
  $0.606531 = |g'(-0.5)| \leq |g'(x)| \leq |g'(-0.4)| = 0.781431, \forall x \in I$, logo $L = 0.781431$.

ii) Calcule as iteradas x_1 e x_2 do método da alínea anterior, e obtenha um majorante para $|z - x_8|$.

Solução: Tem-se $x_1 = g(0.5) = 0.413383, \quad x_2 = g(x_1) = 0.472244$. Um majorante para $|z - x_8|$ obtém-se fazendo $k = 8$ e $L = 0.781431$ na fórmula:

$|z - x_k| \leq \dfrac{L^k}{1 - L}|x_1 - x_0|$,

o que dá $|z - x_8| \leq 0.6361|0.413383 - 0.5| \simeq 0.0551004$

iii) No caso de $g(x) = x + f(x)$, pode usar a sucessão $x_0 = 0.7, \ x_{n+1} = g(x_n), \ n \geq 1$ para aproximar z? Justifique teoricamente.

Solução: Notemos que, neste caso, $g'(x) = 1 + \exp(-x) + 2/(1 + 2x) > 1$, já que $\exp(-x) + 2/(1 + 2x) > 0$ em I. Então, cmo $z \in I$, necessariamente $g'(z) > 1$ e a sucessão do ponto fixo associada a g não pode convergir para z, a não ser que $x_i = z$, para algum $i \geq 0$. Logo não se pode usar este método para aproximar z (z é repulsor para g).

2. A acidez duma solução dum certo hidróxido em ácido hidrocloridrico vem dada por

$$A_{\text{acidez}}(x) = 1 + e^x + x^3 - 14x,$$

onde x representa a concentração de H3O+. Pretende-se determinar a concentração $z \in [0,1]$ de H3O+ duma solução saturada deste hidróxido (solução com acidez nula). Seja

$$g(x) := \frac{1 + e^x + x^3}{14}.$$

(a) Considerando $x_0 = 0$, calcule 8 iteradas pelo método do ponto fixo associado a g. Diga intuitivamente, se a sucessão parece convergir e dê, caso afirmativo, o valor aproximado de z.
Solução:
Utilizando $x_{m+1} = g(x_m)$, *com* $x_0 = 0$, *obteve-se pelo Mathematica*:
$x_0 = 0., x_1 = 0.14285714285714285, x_2 = 0.15403431762786798,$
$x_3 = 0.15501325891715886, x_4 = 0.15509987670043868,$
$x_5 = 0.15510754764330978, x_6 = 0.1551082270425848,$
$x_7 = 0.1551082872159747, x_8 = 0.15510829254544625$

A sucessão parece convergir para um número perto de 1.55. Esse limite é ponto fixo de g. *Para concluirmos que coincide com a raiz da equação, basta ver que se tem a equivalência* $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$. *Logo* $z \approx 1.55$.

(b) Justifique que o método do ponto fixo associado à função iteradora g é convergente para z, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [0,1]$.

(c) Considere $x_0 = 0$ e obtenha uma estimativa para o erro absoluto $|e_8| = |z - x_8|$. Repita o exercício com $x_0 = 0.5$. Comente.

3. Considere a sucessão de números reais definida por

$$z_0 = 1, \qquad z_{k+1} = 1 - \frac{1}{b z_k}, \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

onde b é um número real dado.

i) Com base no teorema do ponto fixo mostre que, se $b > 4$ esta sucessão converge e que todos os seus termos estão compreendidos entre $\frac{1}{2}$ e 1.

ii) Seja $b = \frac{25}{4}$. Através da definição de ponto fixo calcule $z = \lim_k z_k$.

iii) Para o valor de b da alínea anterior mostre que todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo $[\frac{4}{5}, 1]$ e que se tem:

$$|z_{k+1} - z| \leq \frac{4}{75} \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

4. Com a finalidade de aproximar as raízes reais da equação

$$f(x) = x^4 + 2x - 1 = 0, \tag{1}$$

considere-se o método iterativo

$$x_{m+1} = g(x_m), m = 0, 1, 2, ... \tag{2}$$

com função iteradora

$$g(x) = x - (1/2)f(x) \tag{3}$$

(a) Mostre que os pontos fixos de g coincidem com as raízes reais da equação (1).
Sugestão. Mostre que $g(z) = z \Longleftrightarrow f(z) = 0$.

(b) Mostre que o método do ponto fixo (2) converge para a raiz positiva, z, da equação (1), se escolher x_0 no intervalo $I = [0.3, 0.6]$.

(c) Determine a ordem de convergência do método da alínea anterior, justificando.
Sugestão. Analise $g'(x)$

(d) **Classificação dos pontos fixos: atrator ou repulsor**

i. Justifique a afirmação: z é um ponto fixo atractor de g.
Indicação:*mostre que* $|g'(z)| < 1$, *ou seja, que existe um intervalo contendo* z *onde* $|g'(x)| < 1$

ii. Mostre que não é possível usar o mesmo método (2) para obter uma aproximação da raiz negativa da equação $w \in [-1.3, -1.5]$. Conclua: w é um ponto fixo atractor ou repulsor de g?
Indicação:*mostre que* $|g'(z)| > 1$, *ou seja, que* **não existe** *nenhum intervalo contendo* z *onde* $|g'(x)| < 1$. *Tem-se divergência.*

5. Considere a equação de Kepler[1]

$$X - E\,\mathrm{sen}(X) = M \qquad (E_K)$$

(E : excentricidade, M : anomalia média, X : anomalia excêntrica) com $E = 0.2$ e $M = 0.5$

(a) Justifique que (E_K) tem uma única solução X no intervalo $[0, 1]$.

(b) Obtenha uma aproximação de X com 6 algarismos significativos, usando o método do ponto fixo com função iteradora $g(x) = 0.5 + 0.2\,\mathrm{sen}(X)$ e $x_0 = 0.5$. Justifique a convergência deste método, assim como a sua resposta.

6. A equação

$$f(x) = x(e^x - 1) - e^x = 0$$

tem uma raiz $z \in [-1, 0]$ outra $w \in [1, 2]$. Considere a função

$$g(x) = (x - 1)\,e^x.$$

(a) Mostre que z e w são pontos fixos de g.

(b) Mostre que a sucessão $x_{n+1} = g(x_n), n = 0, 1, ...$ converge para $z \in [-1, 0]$, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [-1, 0]$.

[1]Referência: P.M. Fitzpatrick, "Principles of celestial mechanics" , Acad. Press (1970)

(c) Determine ainda a ordem de convergência da sucessão, justificando. Começando com $x_0 = -1$, obtiveram-se as aproximações seguintes para a sucessão de quocientes abaixo:

m	$\frac{\lvert z-x_{m+1}\rvert}{\lvert z-x_m\rvert}$
0	0.365354
1	0.356502
2	0.361116
3	0.359494
$\vdots$	$\vdots$

Diga, justificando, se os valores da tabela confirmam a ordem de convergência do método e obtenha um valor aproximado para o coeficiente assimptótico da convergência.

(d) Partindo de $x_0 = -1$ obtenha $x_1 = -0.73576$. Calcule, sem efectuar mais iterações, o número k tal que o erro absoluto de x_k, ou seja, $|z - x_k|$, não exceda 10^{-4}.

(e) Mostre que w é ponto fixo repulsor de g. Será possível escolher x_0 tal que a sucessão $x_{n+1} = g(x_n)$ seja convergente para o ponto fixo $w \in [1, 2]$?
Comente os resultados obtidos com a sucessão partindo de $x_0 = 1.2$ (para onde parece convergir?):
1.2, 0.664023, -0.652666, -0.86047, -0.78691, -0.81349, -0.803935, -0.807377, -0.806138, -0.806584, -0.806423

7. Considere a função
$$f(x) = 1 - x^2 - 0.5\ e^{-x} \tag{4}$$
e mostre que que tem um único zero $w \in [0, 1]$. Com o fim de aproximar w, considere a família de métodos iterativos $x_{m+1} = g_A(x_m)$, da forma:
$$x_{m+1} = x_m + A\,f(x_m), \quad m = 0, 1, 2, ...(A \neq 0)$$

(a) i) Comece por verificar que a raiz w é ponto fixo de g_A, qualquer que seja $A \neq 0$.
ii) No caso de $A = 1$, como classifica o ponto fixo w para a função g_1 (atractor ou repulsor?).
iii) Mostre que, se $A = 1$ a sucessão converge para w, qualquer que seja x_0 escolhido no intervalo $I = [0.7, 1]$. (Recorra ao Teorema do ponto fixo)
iv) Com $A = 1$, determine a ordem de convergência da sucessão, justificando.
v) Tomando $x_0 = 1$, calcule x_1, x_2. Usando estes valores, obtenha um majorante para o erro $|w - x_2|$.

(b) No caso de $A = 2$, seja $g_2(x)$ a função iteradora correspondente. Calcularam-se alguns elementos da sucessão (2), começando com $x_0 = 0.5$:
0.5, 1.39347, -0.738257, -1.92059, -14.12289, -1.36027×10^6, $-1.79602 \times 10^{590756}$...
Diga o que esses valores sugerem quanto à convergência (ou não) da sucessão para w. Experimente começar com outros valores para x_0 e calcule 5 iteradas. Como classifica o ponto fixo w para a função g_2 (atractor ou repulsor?).

8. (Teste de Julho, 1996) Considere a equação

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - e^{x/2} = 0.$$

Prove que esta equação tem uma única raíz z no intervalo $[0,1]$. Mostre que o método do ponto fixo com função iterado $g(x) = 2\ln\left((x+1/2)^2\right)$ não converge para z qualquer que seja $x_0 \neq z$, $x_0 \in [0,1]$. Como forma de resolver este problema de convergência, use o exercício seguinte e indique qual a sucessão convergente que obteria.

9. Considere a equação $x = g(x)$ e suponha que a mesma tem uma única raíz z no intervalo $I = [a,b]$. Assuma que $g \in C^1(I)$. Supondo que $|g^{'}(x)| > 1$ para todo $x \in I$, prove que se a função inversa g^{-1} verifica que $g^{-1}(I) \subseteq I$, então o método do ponto fixo

$$x_{n+1} = g^{-1}(x_n),\ n = 0, 1, ...$$

converge para z qualquer que seja $x_0 \in I$.

10. (Teste Novembro 2016) Seja a equação

$$e^{2x} + 3x = 0, \tag{5}$$

a qual tem uma única raiz $z \in [-0.3, 0]$. Considere a sucessão do ponto fixo definida por: $x_{n+1} = \dfrac{2x_n - e^{2x_n}}{5}$, $n \in \mathbb{N}_0$.
Mostre que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é convergente para a raiz da equação, qualquer que seja a aproximação inicial x_0 escolhida em $[-0.3, 0]$. Determine a ordem de convergência da sucessão.

Solução: *A sucessão é da forma $x_{n+1} = g(x_n)$ e, se convergir, converge para um ponto fixo de g. É preciso assegurar que o zero de f é ponto fixo de g. Tem-se*

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 5x - f(x) = 5x \Leftrightarrow 5x = 2x - e^{2x} \Leftrightarrow x = \frac{2x - e^{2x}}{5}$$

Condições do teorema do ponto fixo para g em $I = [-0.3, 0]$:

$$g(x) := \frac{2x - e^{2x}}{5}, \qquad g'(x) = \frac{2}{5}(1 - e^{2x}), \quad g \in C^1(I) \quad \textit{(na verdade, } g \in C^\infty(\mathbb{R})\textit{)}$$

- $g(I) \subset I$? Tem-se $g'(x) \geq 0,\ x \in [-0.3, 0]$, pois $g'(0) = 0$ e, para $x < 0$ tem-se $e^{2x} < 1$, logo $g'(x) > 0$. Então

  $$g \text{ crescente } \Rightarrow -0.229762 = g(-0.3) \leq g(x) \leq g(0) = -0.2,\ \forall x \in [-0.3, 0]$$

- $\max|g'(x)| = L < 1, \quad x \in I$? Como $g''(x) < 0,\ x \in I$, então

  g' decrescente $\Rightarrow 0.131872 = g'(-0.2) \leq g'(x) \leq g'(-0.3) = 0.180475,\ \forall x \in [-0.3, -0.2]$

  E tem-se $L = 0.180475$. Nas condições do teorema do pto. fixo, sabe-se que:

  $$\lim_{m\to\infty} \frac{|z - x_{m+1}|}{|z - x_m|} = |g'(z)|$$

  Vimos que
  $g'(x) > 0$ para $x \in [-0.3, 0)$, a que z pertence, logo $g'(z) \neq 0$, o que implica que o limite acima é diferente de zero. Pela definição de ordem de convergência, vem que a ordem do método é 1 e o coeficiente assintótico $K_\infty = |g'(z)|$.

II. 3 Método de Newton e método da secante

1. Pretende-se determinar, utilizando o método de Newton, a maior das duas raízes positivas da equação
$$-x^3 + 14x - 1 - e^x = 0.$$

   (a) Mostre que se x_0 for escolhido no intervalo $I = [2.6, 3]$, estão asseguradas as condições de convergência do método.

   Solução. *Verifiquemos que são satisfeitas, para esse intervalo I, as condições 1,2,3,4 suficientes para a convergência do método de Newton (Critério 1).*

   Vê-se facilmente que $f \in C^2(I)$, já que é soma de funções com derivadas contínuas de todas as ordens.

   1. $f(2.6) \simeq 4.3603$ e $f(3) \simeq -6.0855$, pelo que a eq. tem uma única raiz em I.

   2. $f'(x) = -3x^2 + 14x - e^x$ é diferente de zero em I ? Analisemos o seu sinal. Como $f''(x) = -6x - e^x = -(6x + e^x) < 0$ em I, então f' é decrescente em I. Sendo $f'(2.6) = -19.743... < 0$, vem que $f'(x) \leq f'(2.6) < 0$ para $x \in I = [2.6, 3]$, logo verifica-se 2.

   3. Já provámos que f'' tem sempre o mesmo sinal em I

   4.
$$\frac{|f(2.6)|}{|f'(2.6)|} = 0.220843 < (3 - 2.6) \quad \frac{|f(3)|}{|f'(3)|} = 0.183933 < (3 - 2.6)$$

   Verificando-se as condições do Critério 1, podemos concluir que o método de Newton (*), aplicado à equação dada, converge para a única raiz da eq. no intervalo $I = [2.6, 3]$, qualquer que seja $x_0 \in I$.

   (*) Ou seja, a sucessão definida por:
$$x_{m+1} = x_m - \frac{-x_m^3 + 14x_m - 1 - e^{x_m}}{-3x_m^2 + 14 - e^{x_m}}, \quad m = 0, 1, 2, ...$$

   (b) Calcule um majorante para o erro da segunda iterada (não efectue iterações).

   Solução: *Sem efectuar iterações, há que utilizar a fórmula dada no Teorema 2.11, que é da forma:*
$$|z - x_{m+1}| \leq K\,(z - x_m)^2 \tag{6}$$

   Neste caso, obtenha $K \simeq 0.965$ e $|z - x_2| \leq 0.02$.

2. Considere a aplicação do método de Newton à equação $\cos x - x = 0$ para a aproximar a única raiz $z \in [0.7, 0.8]$.

   (a) Mostre que o método de Newton converge para z se considerar $x_0 = 0.8$ e que a convergência é monótona. Calcule x_1, x_2, x_3.
   Sugestão: *Aplique o Critério 2*

   (b) Mostre que o método de Newton converge para z se começar com $x_0 = 0.7$. Que pode concluir sobre a convergência quando x_0 é qualquer valor do intervalo $[0.7, 0.8]$?
   Sugestão: *Aplique o Critério 1*

3. Considere um circuito eléctrico com uma resistência (R), uma bobina (L) e um condensador (C) em paralelo. De acordo com as leis de Kirchhoff, a impedância $Z = Z(\omega)$ do circuito RLC pode ser expressa, em função da frequência angular ω, pela equação

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}\,.$$

Considere os seguintes valores para os parâmetros R, L e C:

$$R = 225\,\Omega\,[\text{ohm}], \quad C = 0.6 \times 10^{-6}\,F\,[\text{farad}], \quad L = 0.5\,H\,[\text{henry}]$$

e determine pelo método de Newton um valor aproximado de um dos valores de ω, que resultam numa impedância de $75\,\Omega$. Calcule 3 iteradas e ontenha uma estimativa do erro para esta aproximação.

4. Considere um triângulo rectângulo, tal que $d > 0$ representa o comprimento da hipotenusa e θ um dos seus ângulos internos agudos. Conforme já foi referido, o perímetro P do triângulo pode ser calculado através da expressão

$$P = d \times (1 + \sin(\theta) + \cos(\theta)). \tag{7}$$

Admitindo que $P = 11$ e $d = 5$ o objectivo deste exercício é encontrar o ângulo θ que satisfaz (7).

   (a) Mostre que neste caso (7) tem duas soluções em $[0, \pi/2]$. Localize ambas as soluções em intervalos disjuntos.

   (b) Estude se pode aproximar alguma destas soluções pelo método de Newton. Caso afirmativo, calcule 4 iteradas por este método. Analize o erro cometido.

5. (Teste de Novembro de 2016) Considere a equação

$$e^{2x} + 3x = 0 \tag{8}$$

   i) Mostre que a equação (8) admite uma única raiz $z \in [-0.3, 0]$ e que o método de Newton converge monotonamente para z, começando com a aproximação inicial $x_0 = 0$.

   Solução: Seja $f(x) := e^{2x} + 3x$, $f \in C^2(\mathbb{R})$, na verdade C^∞. Tem-se:

   - $f(-0.3)f(0) < 0$, $\quad f'(x) = 2e^{2x} + 3 > 0$, o que garante a existência e unicidade de raiz em $[-0.3, 0]$;
   - $f''(x) = 4e^{2x} > 0 \quad \forall x$, mantendo-se o sentido da concavidade
   - Para $x_0 = 0$, vem $f(0) = 1 > 0$, verificando-se assim a condição

   $$f(x_0)f''(x) > 0 \text{ para } x \in [-0.3, 0]$$

   Esta condição assegura que se escolhe x_0 de modo a que as iteradas $x_1, x_2, ...$ se situem todas do mesmo lado de z (converg. monótona).

ii) Com $x_0 = 0$, calcule x_1 pelo método de Newton. Determine ainda um majorante para o erro absoluto de x_2, sem calcular x_2.
Solução: $x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = -f(0)/f'(0) = -0.2$.
Para obter majorante para $|z - x_2|$:
podemos resolver o exercício com o intervalo dado $[-0.3, 0]$, onde se provou convergência, definindo $K = \dfrac{\max_{[-0.3\ 0]} |f''|}{2\min_{[-0.3\ 0]} |f'|} = \dfrac{f''(0)}{2f'(-0.3)} = 0.48809$
Como $|z - x_1| \leq K(z - x_0)^2$, então

$$|z - x_2| \leq K(z - x_1)^2 \leq K^3(z - x_0)^4 \leq K^3(0.3)^4 = 0.000941846$$

OBSERV: Outro modo de obter majorante
Notemos que a convergência monótona com $x_0 = 0 \Rightarrow z, x_k \in]-0.3, -0.2]$, $\forall k \geq 1$. Da fórmula do erro resulta, para esse intervalo mais pequeno, que

$$|z - x_2| \leq K(z - x_1)^2, \quad K = \frac{\max_{[-0.3,-0.2]} |f''|}{2\min_{[-0.3-0.2]} |f'|} = \frac{f''(-0.2)}{2f'(-0.3)} = 0.32717$$

Como $f(x_1) = f(-0.2) = 0.0703 > 0$ e $f(-0.3) < 0$, a raiz $z \in [-0.3, -0.2]$. Podemos usar o fato de $-0.3 < z < x_1 < x_0 = 0$, onde $x_1 = -0.2$, para podermos considerar $|z - x_1| \leq 0.1$:

$$|z - x_2| \leq 0.32717(0.1)^2 = 0.00327175$$

6. Considere a equação $f(x) = 0$, onde a função

$$f(x) = sin(x) - |x^2 - 4| \qquad \text{tem dois zeros positivos.}$$

(a) Mostre que a equação tem uma única raiz em $[1.6, 1.8]$. Quantas iterações serão necessárias para obter uma aproximação do valor dessa raiz, se utilizar o método da bissecção e pretender que o erro cometido seja inferior a 10^{-6} ?

(b) Verifique se estão satisfeitas as condições de convergência do método de Newton para aproximar a maior das raízes, considerando o intervalo $I = [1.9, 2.4]$ e escolhendo $x_0 = 1.9$. Justifique convenientemente a resposta.

(c) Escolha um x_0 de modo a que o método de Newton convirja para a maior das raízes. Calcule a iterada x_3 do método de Newton.

(d) Nas condições da alínea anterior, determine a ordem de convergência do método de Newton e uma aproximação para o coeficiente assimptótico de convergência.

7. Escreva a expressão geral do método de Newton aplicado à equação $f(x) = 0$, onde f é a função definida por (4).

(a) Sendo o método de Newton um método do ponto fixo, diga qual é a função geradora (ou iteradora) G. A raiz w é ponto fixo dessa G?

(b) Mostre que o método converge para w, qualquer que seja a iterada inicial x_0 pertencente ao intervalo $[0.7, 1]$.

(c) Com $x_0 = 0.7$, calcule x_1, x_2. Determine ainda um majorante para o erro da iterada x_4 (sem calcular mais iteradas).

(d) Indique duas escolhas para x_0 de modo a ter-se convergência monótona.

(e) Determine a ordem de convergência do método de Newton (justifique com base nos resultados sobre a ordem de convergência dos métodos do ponto fixo). Tomando para aproximação de w o valor 0.891632, calcule uma aproximação para o coeficiente assimptótico da convergência K_∞.

(f) Na sequência da alínea anterior, compare o método de Newton com o método considerado na questão 3.a) iv, no que respeita à rapidez de convergência.

(g) Se pretendermos aplicar o método da secante à equação considerada na alínea anterior, como escolher as iteradas iniciais x_0, x_{-1} de modo a garantir convergência do método para w?

8. Considere a equação

$$f(x) = x\tan(x) - 1 = 0,$$

Prove que o método converge para a única raiz no intervalo $[0.8, 0.9]$, quaisquer que sejam as aproximações iniciais x_0, x_{-1} nesse intervalo. Obtenha as três primeiras iteradas para o cálculo da raiz e determine um majorante do erro do resultado obtido.

Solução. *Verifique que o Critério 1 do método da secante é aplicável no intervalo* $[0.8, 0.9]$. *Fazendo* $x_{-1} = 0.8, x_0 = 0.9$, *obtém-se:* $x_1 \simeq 0.856788$, $x_2 \simeq 0.860127$, $x_3 \simeq 0.860335$. *Para obter um majorante do erro de* x_3, *use a fórmula*

$$|z - x_{m+1}| \leq K|z - x_m||z - x_{m-1}|$$

Tem-se $K \simeq 2.063$. *Sugere-se que note o seguinte:* $|z - x_2| < |x_3 - x_2| \simeq 0.207 \times 10^{-3}$ *e* $|z - x_1| < |x_3 - x_1| \simeq 0.355 \times 10^{-2}$. *Vai-se obter o seguinte majorante* $|z - x_3| \leq 0.152 \times 10^{-5}$. *(o que garante 5 algarismos significativos na aproximação* x_3