Exercícios para resolver na aula

1. Considere a equação

$$e^{2x} + 3x = 0 \quad (1)$$

- (a) Mostre que a equação (1) admite uma única raiz $z \in [-0.3, 0]$. e que o método de Newton converge monotonamente para z , começando com a aproximação inicial $x_0 = 0$.
- (b) Determine a ordem de convergência do método de Newton.
- (c) Com $x_0 = 0$, calcule x_1 pelo método de Newton. Determine ainda um majorante para o erro absoluto de x_2 , sem calcular x_2 .

Poderá ser útil a informação: com $x_0 = 0$, obtiveram-se as seguintes iteradas pelo método de Newton: $-0.2, -0.21620038624351456,$

$-0.2162813757852015, -0.2162813777659998, -0.2162813777659998, -0.2162813777659998$

- (d) Considere a sucessão do ponto fixo definida por: $x_{n+1} = \frac{2x_n - e^{2x_n}}{5}, n \in \mathbf{N}_0$.
Mostre que $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}_0}$ é convergente para a raiz da equação, qualquer que seja a aproximação inicial x_0 escolhida em $[-0.3, 0]$. Determine a ordem de convergência da sucessão e um valor aproximado para o coeficiente assintótico da convergência.
- (e) Considere ainda a sucessão do ponto fixo definida por: $x_{n+1} = \frac{\ln(-3x_n)}{2} = g_2(x_n), n \in \mathbf{N}_0$. É possível usar esta sucessão para aproximar z ?

2. O método de Newton como método do ponto fixo

Começemos por notar que o método de Newton, aplicado a $f(x) = 0$, ou seja, a sucessão:

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)} \quad (1)$$

é um método do ponto fixo, ou seja, da forma $x_{m+1} = g(x_m), m \geq 0$.

Exemplo

A expressão do método de Newton aplicado à equação $f(x) = x^3 - 100 = 0$ para aproximar a raiz z (raiz cúbica de 100) é a seguinte:

$$x_{m+1} = x_m - \frac{x_m^3 - 100}{3x_m^2} = g(x_m).$$

Ou seja, é uma sucessão do ponto fixo gerada pela função $g(x) = x - \frac{x^3 - 100}{3x^2}$.

Note-se que a raiz z da equação $f(x) = 0$ verifica $f(z) = 0$, logo, fazendo $x = z$ na expressão de g , obtém-se $g(z) = z$.

- (a) Considere a função geradora do método de Newton, ou seja, $g_{Newt}(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
Supomos $f \in C^2[a, b]$ e $f'(x) \neq 0$.
Verifique que a raiz z da equação $f(x) = 0$ é ponto fixo de $g_{Newt}(x)$. Em seguida, mostre que $g'(z) = 0$. O que pode concluir sobre a ordem de convergência do método de Newton?
- (b) *Baseando-se no teorema geral da ordem de convergência dos métodos do ponto fixo, determine uma condição que garanta a convergência quadrática do método.