IST - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2016/2017 - LEIC-A

4^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas

1. Determine as condições que os parametros $\alpha_i, \beta_i (i = 1, 2)$ devem verificar para que os vectores $(\alpha_1, \beta_1, 3)$ e $(\alpha_2, \beta_2, 9)$, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, sejam linearmente independentes.

2. Diga se os seguintes conjuntos de vectores em $\mathbb{R}^3$ são linearmente dependentes ou linearmente independentes? Nos casos em que sejam linearmente dependentes, indique (para cada um) um subconjunto linearmente independente com o maior n^o possível de elementos e escreva os restantes como combinação linear desses vectores.

   (i) $\{(4, 2, 1), (2, 6, -5), (1, -2, 3)\}$ **(ii)** $\{(1, 2, -1), (3, 2, 5)\}$

   (iii) $\{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ **(iv)** $\{(1, 0, -1), (0, 0, 0), (0, 1, 1)\}$

   (v) $\{(1, 1, 0), (0, 2, 3), (1, 2, 3), (x, y, z)\}$ (com $x, y, z \in \mathbb{R}$).

3. Determine a tal que $\{(a^2, 0, 1), (0, a, 2), (1, 0, 1)\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$.

4. Sejam $U = L(\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0)\})$ e $V_k = L(\{(2, k, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\})$ subespaços de $\mathbb{R}^4$. Determine os valores de k para os quais $\dim(U \cap V_k) = 1$.

5. No espaço linear $\mathbb{R}^3$, construa uma base que inclua os vectores:

   (i) $(1, 0, 2)$ e $(0, 1, 2)$. **(ii)** $(2, -1, 1)$ e $(-4, 2, 1)$. **(iii)** $(-1, 2, 1)$ e $(1, 0, -1)$.

6. Verifique que os seguintes subconjuntos do espaço linear de todas as funções reais de variável real são linearmente dependentes. Indique (para cada um) um subconjunto linearmente independente com o maior n^o possível de elementos e escreva os restantes como combinação linear desses vectores.

   (i) $S = \{\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t, \cos 2t\}$ **(ii)** $S = \{2, \operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t\}$

   (iii) $S = \{e^t, e^{-t}, \cosh t\}$ **(iv)** $S = \left\{1, t, t^2, (t+1)^2\right\}$

   Determine uma base para cada subespaço $L(S)$ e calcule a respectiva dimensão.

7. Seja V o espaço linear de todas as funções reais de variável real. Sejam $f, g, h \in V$, com $f(t) = \operatorname{sen} t$, $g(t) = \cos t$ e $h(t) = t$. Mostre que o conjunto $\{f, g, h\}$ é linearmente independente.

8. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^2$. Caso não sejam bases, determine subconjuntos desses conjuntos que sejam bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses subconjuntos. Em cada base de $\mathbb{R}^2$ encontrada, determine as coordenadas do vector $(0, -1)$ em cada base ordenada encontrada. Relativamente a cada base ordenada de $\mathbb{R}^2$, determine ainda o vector cujas coordenadas são $(0, -1)$.

   (i) $\{(1, 3), (1, -1)\}$ **(ii)** $\{(0, 0), (1, 2)\}$ **(iii)** $\{(2, 4)\}$

   (iv) $\{(-5, 0), (0, 2)\}$ **(v)** $\{(1, 2), (2, -3), (3, 2)\}$ **(vi)** $\{(1, 0), (0, 1)\}$

9. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^3$. Caso não sejam bases, determine subconjuntos desses conjuntos que sejam bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses subconjuntos. Em cada base de $\mathbb{R}^3$ encontrada, determine as coordenadas do vector $(-1, 1, -2)$ em cada base ordenada encontrada.

Relativamente a cada base ordenada de $\mathbb{R}^3$, determine ainda o vector cujas coordenadas são $(-1,1,-2)$.

(i) $\{(1,2,3),(0,0,0),(0,1,2)\}$ **(ii)** $\{(1,2,0),(0,1,-1)\}$

(iii) $\{(3,2,2),(-1,2,1),(0,1,0)\}$ **(iv)** $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$

(v) $\{(1,1,-1),(2,3,4),(4,1,-1),(0,1,-1)\}$ **(vi)** $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

10. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^4$. Caso não sejam bases, determine subconjuntos desses conjuntos que sejam bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses subconjuntos. Em cada alínea indique uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua pelo menos dois vectores do conjunto apresentado.

    (i) $\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,1,1,1),(0,1,1,1)\}$

    (ii) $\{(1,-1,0,2),(3,-1,2,1),(1,0,0,1)\}$

    (iii) $S=\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(1,0,1,0),(0,0,1,1)\}$

    (iv) $\{(1,0,0,2),(1,0,2,0),(1,2,0,0),(3,0,0,0)\}$

    (v) $\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(3,-6,11,-1),(0,0,5,5)\}$

    (vi) $S=\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2),(5,-2,2,2)\}$. Nesta alínea, verifique que $(8,-3,3,5)\in L(S)$ e determine uma base de $L(S)$ que inclua o vector $(8,-3,3,5)$.

11. Determine as coordenadas de $p(t)=t$ na base ordenada $\{2-t,2+t\}$ de $\mathcal{P}_1$. ($\mathcal{P}_1$ é o espaço linear dos polinómios reais de grau menor ou igual a 1.)

12. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathcal{P}_2$ (espaço linear dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2). Caso não sejam bases, determine subconjuntos desses conjuntos que sejam bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses subconjuntos. Determine as coordenadas do vector $1-t$ em cada base ordenada de $\mathcal{P}_2$ encontrada. Relativamente a cada base ordenada de $\mathcal{P}_2$, determine ainda o vector cujas coordenadas são $(-1,3,2)$.

    (i) $\{2+t-t^2,2t+2t^2,-t^2\}$ **(ii)** $\{2t-t^2,1-2t^2,2+t,1-4t\}$

    (iii) $\{1+t^2,t-t^2,1-t+2t^2,1+t\}$ **(iv)** $\{-1+2t+t^2,2-t\}$

    (v) $\{1+2t-t^2,3+t^2,5+4t-t^2,-2+2t-t^2\}$ **(vi)** $\{1,t,t^2\}$

13. Verifique que os seguintes subconjuntos de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ são subespaços de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ relativamente às operações usuais e determine uma base para cada um deles indicando as respectivas dimensões.

    (i) $\{A\in\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}):\operatorname{tr}A=0\}$ **(ii)** $\left\{A\in\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}):A\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}A\right\}$

14. Escreva a matriz $\begin{bmatrix}3&1\\1&-1\end{bmatrix}$ como combinação linear das matrizes

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0&2\\0&-1\end{bmatrix}.$$

Encontre uma matriz 2×2 que não pertença a $L\left(\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right\}\right)$. Antes de a determinar, explique porque é que essa matriz existe.

15. Mostre que as matrizes $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ formam uma base para o espaço linear $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

16. Seja $S=\left\{\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 11\\ -5 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & -5\\ 3 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\right\}$. Seja W um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gerado por S. Determine uma base para W que inclua vectores de S.

17. Determine uma base para $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$. Qual é a dimensão do espaço linear $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$?

18. Determine uma base para cada um dos seguintes subespaços de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e calcule a respectiva dimensão:

    (i) O conjunto de todas as matrizes (reais) diagonais do tipo 3×3.

    (ii) O conjunto de todas as matrizes (reais) simétricas do tipo 3×3.

19. Determine as dimensões e indique bases para: o núcleo, o espaço das linhas e o espaço das colunas das seguintes matrizes.

    (i) $\begin{bmatrix}3 & 1\\ -6 & -2\end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix}3 & 0 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ **(iv)** $\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$

    (v) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ **(vi)** $\begin{bmatrix}-1 & 3 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 0 & 2\end{bmatrix}$ **(vii)** $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 2 & 3 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

    Determine tambem a característica e a nulidade de cada uma delas.

20. Quais são as matrizes do tipo 3×3 cujo núcleo tem dimensão 3?

21. Seja $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{C}(A)=\mathcal{N}(A)$. Prove que $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ com n par. Dê um exemplo para $n=4$.

22. Sejam U e V subespaços de W tais que $\dim U=4, \dim V=5$ e $\dim W=7$. Diga quais as dimensões possíveis para $U\cap V$.

23. Determine bases e calcule as dimensões de $U+V$ e $U\cap V$, dizendo em que casos $U+V$ é a soma directa $U\oplus V$ (determine-a) dos subespaços U e V.

    (i) $U=L\left(\{(1,-1,1),(0,1,1)\}\right),\ V=L\left(\{(1,1,2),(-1,1,1)\}\right)$ em $\mathbb{R}^3$.

    (ii) $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-z=0 \text{ e } x+y=0\},\ V=L\left(\{(1,1,1)\}\right)$ em $\mathbb{R}^3$.

    (iii) $U=L\left(\{(1,0,1),(-1,1,2)\}\right),\ V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+3z=0\}$ em $\mathbb{R}^3$.

    (iv) $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y=z\},\ V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=0\}$ em $\mathbb{R}^3$.

    (v) $U=L\left(\{1+t,1-t^2\}\right),\quad V=\{a_0+a_1t+a_2t^2\in\mathcal{P}_2 : a_2-a_1+a_0=0\}$ em $\mathcal{P}_2$.

(vi) $U = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : \; p(-1) = 2p(0) - p(1)\}, \quad V = L(\{-1+t, 1-t^2\})$ em $\mathcal{P}_2$.

(vii) $U = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : \; p(1) = 0\}, \quad V = L(\{1-t, t-t^2, -1+t^2\})$ em $\mathcal{P}_2$.

(viii) $U = L\left(\{1+t, 1-t^3\}\right), \quad V = L\left(\{1+t+t^2, t-t^3, 1+t+t^3\}\right)$ em $\mathcal{P}_3$.

(ix) $U = L\left(\{(2,-2,1,-2), (-1,1,1,3), (0,0,-6,-8), (-1,1,-5,-5)\}\right)$,

$V = L\left(\{(0,0,0,-1), (0,1,2,3), (0,2,4,8)\}\right)$ em $\mathbb{R}^4$.

(x) $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + 3z = 0 \;$ e $\; y + 2z + 3w = 0\}$,

$V = L\left(\{(2,5,-4,1), (0,9,-6,1), (-4,-1,2,-1)\}\right)$ em $\mathbb{R}^4$.

Neste alínea **(viii)** mostre que $U = V$.

(xi) Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por $\{(1,-1,-1,-2,0), (1,-2,-2,0,-3), (1,-1,-2,-2,1)\}$. Seja V o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por $\{(1,-2,-3,0,-2), (1,-1,-3,2,-4), (1,-1,-2,2,-5)\}$.

Comece por escrever U e V como soluções de sistemas de equações lineares homogéneas.

(xii) Sejam U e V subespaços de $\mathbb{R}^4$ gerados respectivamente por F e por G, com

$$\begin{aligned} F &= \{(1,0,-1,0), (0,1,1,1), (1,0,0,-2), (0,0,-1,2)\}, \\ G &= \{(1,1,1,1), (1,2,0,-1), (0,0,1,1)\}. \end{aligned}$$

24. Seja $\mathcal{P}_2 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2. Seja $U = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : p(-1) + p(1) = 0\}$.

   a) Seja $V = L\left(\{2+t, 1-t+3t^2, 1+t-t^2, 1+t^2\}\right)$. Determine uma base para $U \cap V$.

   b) Determine um subespaço W de $\mathcal{P}_2$ tal que $U \oplus W = \mathcal{P}_2$.

25. Considere o espaço linear $U = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right)$. Determine uma base para U.

26. Considere $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x - y = 0\}$ e $V_2 = L\left(\{(1,0,1), (0,1,0)\}\right)$.

   a) Determine uma base para V_1.

   b) Determine uma matriz B tal que $V_2 = \mathcal{N}(B)$.

   c) Calcule, justificando, $\dim(V_1 \cap V_2)$.

   d) Determine um subespaço W de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus W$.

27. Com $U = L\left(\{(0,1,1,0), (0,1,-1,2), (0,1,0,1)\}\right)$ e $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + w = 0$ e $y - w = 0\}$, diga, justificando, se $U + V = \mathbb{R}^4$ e calcule, justificando, $\dim(U \cap V)$.

28. Sejam $B_1 = \{1, 1-t, t^2\}$ e $B_2 = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_2$. Suponha que as coordenadas de um vector $p(t) \in \mathcal{P}_2$ em relação à base B_2 são dadas por $(1,2,3)$. Determine as coordenadas do mesmo vector $p(t)$ em relação à base B_1.

29. Seja $B = \{v_1, v_2\}$ uma base ordenada de $\mathcal{P}_1$. Sejam $(1,-1)$ e $(2,2)$ respectivamente as coordenadas de dois polinómios $1+t$ e $1-t$ em relação à base B. Determine B.

30. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(i) Calcule a nulidade e a característica de A.

(ii) Determine bases para o espaço das colunas de A e para o núcleo de A.

(iii) Usando a alínea anterior, determine a solução geral do sistema de equações lineares homogéneo $Au = \mathbf{0}$.

(iv) Resolva o sistema de equações $Au = b$, com $b = (1, 0, 2, -1, 0)$. Note que b é igual à 1^a coluna de A e use esse facto de modo a encontrar uma solução particular de $Au = b$.

31. Considere as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Determine uma base para $\mathcal{N}(A+B)$.

b) Determine $\dim(\mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B))$.

32. Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

a) Determine uma base para $\mathcal{C}(A)$.

b) Resolva a equação: $Au = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T$.

c) Determine uma base para $\mathcal{N}(A+2I)$.

d) Calcule $\dim(\mathcal{N}(A+2I) + \mathcal{N}(A-I))$.

33. Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$: $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \; x - y + z - w = 0\}$.

a) Determine uma base para $\mathbb{R}^4$ que inclua pelo menos dois vectores de U.

b) Determine uma base para U que inclua os vectores $(1, 1, 1, 1)$ e $(-1, -1, 1, 1)$.

34. Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Sejam $\mathcal{C}(A_\alpha)$, $\mathcal{L}(A_\alpha)$ e $\mathcal{N}(A_\alpha)$, respectivamente, o espaço das colunas, o espaço das linhas e o núcleo de A_α. Sejam A_0, A_{-1} e A_1 as matrizes que se obtêm de A_α fazendo respectivamente $\alpha = 0$, $\alpha = -1$ e $\alpha = 1$.

a) Determine uma base para $\mathcal{N}(A_{-1})$.

b) Determine uma base para $\mathcal{C}(A_{-1})$ e calcule as coordenadas de $(0, 0, 0, 1)$ nessa base.

c) Determine a solução geral do sistema de equações lineares $A_0 u = b$, onde b é igual à 1^a coluna da matriz A_0.

d) Determine uma base para $\mathcal{L}(A_1) + \mathcal{C}(A_1)$.

e) Determine uma base para $\mathcal{L}(A_{-1}) \cap \mathcal{C}(A_{-1})$.

35. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Determine o n^o real λ para o qual $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ é solução da equação: $Au - \lambda u = \mathbf{0}$.

b) Determine uma base para $\mathcal{N}(A)$.

c) Resolva a equação: $Au = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}^T$.

d) Determine todos os vectores b para os quais a equação $Au = b$ tenha sempre solução.

36. Considere a matriz dada por: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Determine, justificando, a dimensão do núcleo de A.

b) Diga, justificando, se $\{(1,0,0,0)\}$ é uma base do espaço das colunas de A.

37. Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$: $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \ x+y+z+w = 0\}$.

a) Determine uma base para U.

b) Determine uma base para U que inclua os vectores $(1,-1,-1,1)$ e $(-1,0,0,1)$.

38. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Sejam $\mathcal{N}(A), \mathcal{L}(A), \mathcal{C}(A)$, respectivamente, núcleo, espaço das linhas e espaço das colunas de A.

a) Determine uma base para $\mathcal{N}(A)$.

b) Determine uma base para $\mathbb{R}^3$ que inclua duas colunas de A.

c) Determine uma base para $\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{C}(A)$.

39. Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & a & b \\ c & d & 4 \end{bmatrix}$. Determine a, b, c, d tais que $\operatorname{nul} A = 2$ e $(1,0,2) \in \mathcal{L}(A)$.

40. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $\{(1,1,0,-1),(1,1,0,1)\}$ e considere ainda o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$: $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y = w\}$.

a) Determine uma base para $\mathbb{R}^4$ que inclua dois vectores de U.

b) Sendo $\mathcal{B} = \{(2,2,0,0),(1,1,0,1)\}$ uma base ordenada de U, calcule as coordenadas do vector $(1,1,0,-7)$ em relação a $\mathcal{B}$.

c) Determine uma base para $U+V$ e uma base para $U \cap V$, indicando as respectivas dimensões.

41. Sejam A e B matrizes do tipo $n \times n$ tais que $AB = BA$. Mostre que

$$\operatorname{car}(A+B) + \operatorname{car}(AB) \leq \operatorname{car}(A) + \operatorname{car}(B).$$