Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2016/2017

LEIC-A

3^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas

1. Verifique que os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, com as operações usuais, não são subespaços de $\mathbb{R}^2$.

   (i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$
   (ii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$
   (iii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$
   (iv) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = \pi\}$
   (v) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{N}_0 \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$
   (vi) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \pi^2\}$
   (vii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$

2. Verifique que os seguintes conjuntos, com as operações usuais, são (todos os) subespaços de $\mathbb{R}^2$.

   (i) $\{(0,0)\}$
   (ii) $V_k = \{(x,kx) : x \in \mathbb{R}\}$ com $k \in \mathbb{R}$
   (iii) $U = \{(0,a) : a \in \mathbb{R}\}$
   (iv) $\mathbb{R}^2$

3. No espaço linear $\mathbb{R}^3$, considere o subconjunto $U_k = \{(x,y,k) : x,y \in \mathbb{R}\}$ onde k é uma constante real. Determine os valores de k para os quais U_k é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

4. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$. Diga quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, com as operações usuais, são subespaços de $\mathbb{R}^3$ e indique os respectivos conjuntos geradores. Escreva ainda cada um dos subespaços na forma $\mathcal{N}(A)$, explicitando a matriz A.

   (i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2\}$
   (ii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$
   (iii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$
   (iv) $\{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$
   (v) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x \text{ e } z = 3x\}$
   (vi) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1\}$
   (vii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ e } x - y - z = 0\}$
   (viii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \text{ ou } y = z\}$
   (ix) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0 \text{ e } 2y + z = 0\}$
   (x) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$

5. Diga se os vectores $(-2,2,2,0), (-2,1,1,0), (0,-1,1,-1)$ pertencem aos seguintes subespaços e encontre um conjunto de geradores para cada um desses subespaços do espaço linear $\mathbb{R}^4$.

   (i) $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \text{ e } y + z = 0\}$
   (ii) $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}$
   (iii) $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - z = 0 \text{ e } x + y + 2w = 0 \text{ e } y - z + w = 0\}$

6. Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço linear de todos os polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a n, com as operações usuais. Diga quais dos seguintes subconjuntos de $\mathcal{P}_2$, com as operações usuais, são subespaços de $\mathcal{P}_2$ e indique os respectivos conjuntos geradores.

   (i) $\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_0 = 0\}$

   (ii) $\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 = 2a_0 \ e \ a_1 = 0\}$

   (iii) $\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_1 = 1\}$

   (iv) $\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 = 2\}$

   (v) $\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 + 2a_0 = 0\}$

7. Defina por meio de sistemas de equações homogéneas os seguintes subespaços.

   (i) Em $\mathcal{P}_2$: $L\left(\{1 - t^2, 1 + t\}\right)$

   (ii) $L\left(\{(1,0,1),(0,1,0),(-2,1,-2)\}\right)$

   (iii) $L\left(\{(0,1,0),(-2,1,-2)\}\right)$

   (iv) $L\left(\{(1,1,2),(2,1,1)\}\right)$

   (v) $L\left(\{(1,0,-1,1)\}\right)$

   (vi) $L\left(\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(3,-6,11,-1),(0,0,1,-2)\}\right)$

8. Seja $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o espaço linear de todas as matrizes do tipo $m \times n$ com entradas reais. Diga quais dos seguintes subconjuntos de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, com as operações usuais, são subespaços de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e indique os respectivos conjuntos geradores.

   (i) $\left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : b = a + c\right\}$

   (ii) $\left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : b < 0\right\}$

   (iii) $\left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : a = -2c \ \text{ e } \ f = 2e + d\right\}$.

9. Construa uma matriz cujo núcleo seja gerado pelo vector $(2,0,1)$.

10. Existe alguma matriz cujo espaço das linhas contém o vector $(1,1,1)$ e cujo núcleo contém $(1,0,0)$?

11. Determine o espaço das colunas, o espaço das linhas e o núcleo das seguintes matrizes.

   (i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(iv)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (v) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **(vi)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ **(vii)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(viii)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

12. Verifique que, com as operações usuais, o seguinte conjunto de matrizes

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

gera o subespaço $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ do espaço linear $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

13. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, os vectores $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2)$ e $v_3 = (1, 1, 0)$. Mostre que os seguintes vectores são combinações lineares de v_1, v_2 e v_3.

    (i) $(3, 3, 0)$ **(ii)** $(2, 1, 5)$ **(iii)** $(-1, 2, 0)$ **(iv)** $(1, 1, 1)$

14. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^4$, os vectores $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0, 0)$ e $v_3 = (0, 1, 2, 1)$. Diga quais dos seguintes vectores pertencem ao subespaço $L(\{v_1, v_2, v_3\})$.

    (i) $(-1, 4, 2, 2)$ **(ii)** $(2, 0, 2, 2)$ **(iii)** $(1, 1, -2, 2)$ **(iv)** $(0, 1, 1, 0)$

15. Determine o valor de k para o qual o vector $u = (1, -2, k) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vectores
$$v = (3, 0, -2) \quad \text{e} \quad w = (2, -1, -5).$$

16. Verifique que os seguintes conjuntos de vectores geram $\mathbb{R}^3$.

    (i) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

    (ii) $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

    (iii) $\{(1, 1, 1), (-1, 1, -1), (1, -1, -1), (-1, -1, 1)\}$

17. Determine os vectores (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ que pertencem a $L(\{u, v, w\})$ onde
$$u = (2, 1, 0), \quad v = (1, -1, 2) \quad \text{e} \quad w = (0, 3, -4).$$

18. Considere, no espaço linear $\mathcal{P}_2$, os vectores $p_1(t) = 2 + t + 2t^2$, $p_2(t) = -2t + t^2$, $p_3(t) = 2 - 5t + 5t^2$ e $p_4(t) = -2 - 3t - t^2$. O vector
$$q(t) = 2 + t + t^2$$
pertence à expansão linear $L(\{p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)\})$? Podem os vectores $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ e $p_4(t)$ gerar $\mathcal{P}_2$?

19. Sejam
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$
Verifique que o espaço das linhas de A é igual ao espaço das linhas de B. Conclua então que os espaços das colunas de A^T e de B^T são iguais.

20. Escreva a matriz $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ como combinação linear das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Encontre uma matriz 2×2 que não pertença a

$$L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

21. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $\{(1,1,0,-1),(1,1,0,1)\}$. Seja S=$\{(1,0,0,2)\}+U$ e considere ainda o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$: $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y = w\}$.

a) Determine um sistema de duas equações lineares cujo conjunto de soluções seja S.

b) Encontre uma matriz A do tipo 2×4 cujo núcleo seja igual a U.

22. Considere os seguintes subespaços U e V de $\mathbb{R}^3$ e determine $u_1, u_2, u_3, v \in \mathbb{R}^3$ tais que $U + V = L(\{u_1, u_2, u_3\})$ e $U \cap V = L(\{v\})$.

$U = L(\{(1,-1,1),(0,1,1)\})$, $V = L(\{(1,1,2),(-1,1,1)\})$.

23. Considere os seguintes subespaços U e V de $\mathbb{R}^3$, determine $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$ tais que $U+V = L(\{u_1, u_2\})$ e verifique que $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$.

$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 \text{ e } x + y = 0\}$, $V = L(\{(1,1,1)\})$.

24. Considere os seguintes subespaços U e V de $\mathbb{R}^3$ e determine $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ tais que $U + V = L(\{u_1, u_2, u_3\})$ e $U \cap V = L(\{v\})$.

$U = L(\{(1,0,1),(-1,1,2)\})$, $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = 0\}$.

25. Considere os seguintes subespaços U e V de $\mathbb{R}^3$, determine $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ tais que $U + V = L(\{u_1, u_2, u_3\})$ e verifique que $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$.

$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$, $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$.

26. Considere os seguintes subespaços U e V de $\mathcal{P}_2$ e determine $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathcal{P}_2$ tais que $U + V = L(\{u_1, u_2\})$ e $U \cap V = L(\{v_1, v_2\})$.

$U = L(\{1+t, 1-t^2\})$, $\quad V = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 + a_0 = 0\}$.

27. Considere os seguintes subespaços U e V de $\mathcal{P}_2$ e determine $u_1, u_2, u_3, v \in \mathcal{P}_2$ tais que $U + V = L(\{u_1, u_2, u_3\})$ e $U \cap V = L(\{v\})$.

$U = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : \ p(-1) = 2p(0) - p(1)\}$, $\quad V = L(\{-1+t, 1-t^2\})$ em $\mathcal{P}_2$.

28. Considere os seguintes subespaços U e V de $\mathcal{P}_2$ e determine $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathcal{P}_2$ tais que $U + V = L(\{u_1, u_2\})$ e $U \cap V = L(\{v_1, v_2\})$.

$U = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : \ p(1) = 0\}$, $\quad V = L(\{1-t, t-t^2, -1+t^2\})$ em $\mathcal{P}_2$.

29. Considere os seguintes subespaços U e V de $\mathcal{P}_3$ e determine $u_1, u_2, u_3, u_4, v \in \mathcal{P}_3$ tais que $U + V = L(\{u_1, u_2, u_3, u_4\})$ e $U \cap V = L(\{v\})$.

$U = L(\{1+t, 1-t^3\})$, $\quad V = L(\{1+t+t^2, t-t^3, 1+t+t^3\})$ em $\mathcal{P}_3$.