Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2016/2017
LEIC-A
2^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas

1. Verifique que:

(i) $\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{1000} = I$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2 = -I$

(iv) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{222} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{220} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(v)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(vii)** $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

(viii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **(ix)** $3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

(x) $\left(\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\right)^T - 2\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 2 \\ -3 & \sqrt{2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -7 & -2\sqrt{2}-11 \\ 9 & 2\sqrt{2}+10 \end{bmatrix}$

(xi) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (se $ad - bc \neq 0$) **(xii)**

A 2^a coluna de $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 2 & 9 \\ -7 & 1 & 6 \\ 9 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(xiii) As constantes a, b e c que definem a função $y = ax^2+bx+c$ cujo gráfico passa pelos pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ e (x_3, y_3) (de abcissas distintas entre si), constituem a solução $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ do sistema linear cuja matriz aumentada é dada por: $\left[\begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{array}\right]$.

2. Efectue, sempre que possível, as seguintes operações.

(i) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -\pi \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 2 & 4 \\ -3 & \sqrt{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(iv) $2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ **(v)** $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **(vi)** $\begin{bmatrix} -2 & \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

(vii) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$ **(viii)** $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} 2 \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -3 \end{bmatrix}\right)^T$

(ix) $\left(2\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{8}{9} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{5}{3} & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}\right)^T$

(x) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 6 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ -\frac{1}{3} & -3 \end{bmatrix}$ **(xi)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ -\frac{1}{3} & -3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 6 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

3. Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{4\times 4} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ em cada um dos seguintes casos:

   (i) $a_{ij} = j^2 (-1)^{i+j}$ **(ii)** $a_{ij} = \begin{cases} -a_{ji} & \text{para todo } i, j \\ \\ j \quad \text{se} & j > i \end{cases}$

4. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Em função do parâmetro α, calcule a característica e a nulidade das seguintes matrizes. Em cada alínea, indique ainda (se existirem), justificando, os valores de α para os quais essas matrizes são invertíveis.

   (i) $\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2-\alpha & -1 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 2 & \alpha^2 & -\alpha \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha^2-1 & \alpha+1 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha^2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

5. Existem 16 matrizes 2×2 só com 0 e 1 nas respectivas entradas. Quantas são invertíveis?

6. Determine (se existirem) as inversas das seguintes matrizes.

   (i) $[1]$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(iv)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **(v)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **(vi)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

   (vii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(viii)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ **(ix)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(x)** $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

   (xi) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **(xii)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, com $k_1, k_2, k_3, k_4 \neq 0$

7. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 + 2A + 2I = \mathbf{0}$. Verifique que A é invertível e determine a sua inversa.

8. Sejam $A, B, X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis tais que $(AB)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$. Em cada um dos seguintes casos, determine a matriz X que satisfaz a equação

   (i) $AXB + AB = \mathbf{0}$ **(ii)** $BXA - A^{-1}B^{-1} = \mathbf{0}$

9. Determine a matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} A^T + (\operatorname{tr} I)\, I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

10. Determine a matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\left(A \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right)^T = 3\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2$.

11. Determine a matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\left(2I - (3A^{-1})^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$.

12. Determine a matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $(A^T + 4I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

13. Determine a matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = I$.

14. Determine a matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $2(A - I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

15. Determine a matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} (2I - A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

16. Determine a matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $A^T - I = \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - I\right)^{-1}$.

17. Determine $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} A\right)^T + 2I = \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 - 2\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right)^{-1}$.

18. Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determine a matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $B^T AB + I = 2I$.

19. **(i)** Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^k = \mathbf{0}$ para algum $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Verifique que

$$(I - A)^{-1} = I + A + ... + A^{k-1}$$

(ii) Calcule $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$.

20. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$.

(i) Verifique que $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **(ii)** Calcule $(I - A)(I + A + A^2)$.

21. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Determine o conjunto solução do sistema linear homogéneo $AX = 0$ e resolva o sistema linear $AX = B$.

22. Seja

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \alpha \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2+\alpha & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Determine a característica de A_α em função do parâmetro α e diga quais são os valores de α para os quais A_α é invertível.

b) Determine a inversa da matriz A_0 $(\alpha = 0)$.

c) Determine a solução do sistema $A_0X = B$, em que $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

23. Seja

$$B_{a,b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

(i) Determine a característica e a nulidade de $B_{a,b}$ em função de a e b.

(ii) Para $a = 1$ e $b = 0$ calcule a matriz inversa da matriz $B_{1,0}$, isto é, $(B_{1,0})^{-1}$.

(iii) Determine a solução geral do sistema linear $B_{1,0}X = C$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T$.

(iv) Para $b = 1$, determine a solução geral do sistema linear $B_{a,1}X = D$, em que D é o simétrico da 3^a coluna de $B_{a,1}$.

24. Sejam $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Sejam $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ duas soluções do sistema linear $AX = B$. Determine, justificando, uma solução de $AX = B$ distinta das anteriores.

25. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ 2 & 3 & \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível cuja 3^a coluna não é conhecida. Determine, justificando, a 1^a coluna da matriz A^{-1}.

26. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $Au = \mathbf{0}$ para qualquer $u \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Prove que $A = \mathbf{0}$.

27. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ matrizes não nulas. Determine a característica de AB^T. Justifique.

28. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $AB = A + B$. Mostre que $AB = BA$.

29. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $ABA = B$ e $BAB = A$. Mostre que $A^2 = B^2$.

30. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $A^2 = A$, $B^2 = B$ e $(A+B)^2 = A + B$. Mostre que

$$AB = BA = \mathbf{0}.$$