



Análise Matemática IV - A

2º Semestre 2006/2007

1º Exame / 2º Teste — LMAC, LEFT, LEBM, LEA

21 de Junho de 2007

Duração: 1h 30min (teste) ; 3h (exame).

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(2 val.) 1. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa em $\mathbb{C}$ tal que $f(0) = 1$ e:

$$\operatorname{Im} f(x + iy) = \operatorname{sh} 2x \operatorname{sen} 2y, \quad \text{para todos os } x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Determine $f(z)$, para qualquer $z \in \mathbb{C}$.

Resolução: Dado que $f \in H(\mathbb{C})$, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ e $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy) = \operatorname{sh} 2x \operatorname{sen} 2y$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. Assim:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \operatorname{ch} 2x \operatorname{sen} 2y \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = \operatorname{ch} 2x \cos 2y + \varphi(y),$$

e, ainda

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2 \operatorname{ch} 2x \operatorname{sen} 2y \quad \Rightarrow \quad -2 \operatorname{ch} 2x \operatorname{sen} 2y + \varphi'(y) = -2 \operatorname{ch} 2x \operatorname{sen} 2y \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = C.$$

Atendendo a que $f(0) = 1$, temos então:

$$1 = u(0, 0) + iv(0, 0) = 1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Resulta assim que, para qualquer $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= \operatorname{ch} 2x \cos 2y + i \operatorname{sh} 2x \operatorname{sen} 2y \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \cos 2y + i \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \operatorname{sen} 2y \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} (\cos 2y + i \operatorname{sen} 2y) + \frac{1}{2} e^{-2x} (\cos 2y - i \operatorname{sen} 2y) \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} e^{2iy} + \frac{1}{2} e^{-2x} e^{-2iy} \\ &= \frac{e^{2(x+iy)} + e^{-2(x+iy)}}{2} \\ &= \operatorname{ch} 2(x + iy) \end{aligned}$$

b) Sendo γ um caminho fechado tal que $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z+i\pi} = 100$, calcule:

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z^2)}{z+i\pi} dz.$$

Resolução: Como $\text{Ind}_{\gamma}(-i\pi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z+i\pi} = 100$ e $f(z^2)$ é holomorfa em $\mathbb{C}$ (trata-se da composta de duas funções holomorfas em $\mathbb{C}$), utilizando a fórmula integral de Cauchy:

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z^2)}{z+i\pi} dz = 2\pi i \text{Ind}_{\gamma}(-i\pi) f((-i\pi)^2) = 200\pi i \text{ch}(-2\pi^2) = 200\pi i \text{ch}(2\pi^2)$$

(2 val.) 2. Calcule o integral

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z^{100}-1)(z+7)},$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução: A função $f(z) = \frac{1}{(z^{100}-1)(z+7)}$ tem singularidades nas soluções de $z^{100} = 1$, $z_k = e^{\frac{ik\pi}{50}}$, com $k = 0, 1, \dots, 99$ e em $z = -7$. Destas, estão no interior da curva precisamente as soluções de $z^{100} = 1$. Pelo teorema dos resíduos:

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{(z^{100}-1)(z+7)} dz = 2\pi i \sum_{j=0}^{99} \text{Res}(f, z_j)$$

Atendendo a que f é uma função meromorfa:

$$\text{Res}(f, -7) + \text{Res}(f, \infty) + \sum_{j=0}^{99} \text{Res}(f, z_j) = 0$$

Resulta assim que:

$$\oint_{|z|=2} f(z) dz = 2\pi i (-\text{Res}(f, -7) - \text{Res}(f, \infty))$$

Para calcular o resíduo de f no infinito, notemos primeiro que:

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{z^{100}}-1\right)\left(\frac{1}{z}+7\right)} = \frac{1}{z^2} \frac{z^{101}}{(1-z^{100})(1+7z)} = \frac{z^{99}}{(1-z^{100})(1+7z)}$$

Assim,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

pelo que $\text{Res}(f, \infty) = 0$ (singularidade removível).

Por outro lado $z = -7$ é um polo simples pois

$$\lim_{z \rightarrow -7} (z + 7)f(z) = \lim_{z \rightarrow -7} \frac{1}{(z^{100} - 1)} = \frac{1}{(-7)^{100} - 1} = \frac{1}{7^{100} - 1}$$

Resulta pois que:

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{(z^{100} - 1)(z + 7)} = -\frac{2\pi i}{7^{100} - 1} = \frac{2\pi i}{1 - 7^{100}}$$

(2 val.) 3. Utilizando o teorema dos resíduos, calcule o integral impróprio:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3 + 1} dx$$

Resolução: Seja:

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + 1}.$$

As singularidades de f são as raízes cúbicas de -1 , ou seja:

$$z_0 = e^{i\pi/3}, \quad z_1 = e^{3i\pi/3} = -1 \quad e \quad z_2 = e^{5i\pi/3} = e^{-i\pi/3}$$

Note-se que $z_1 = -1$ pertence ao eixo real, pelo que o integral impróprio $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ será igual ao valor principal de Cauchy de $\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz$ (se este último existir, obviamente).

Consideremos o caminho fechado e simples $C_{\epsilon, R} = L^+ + \gamma_{\epsilon} + L^- + \Gamma_R$, onde γ_{ϵ} é a semi-circunferência $|z + 1| = \epsilon$, $\text{Im } z \geq 0$ percorrida no sentido inverso, Γ_R é a semicircunferência $|z| = R$, $\text{Im } z \geq 0$ percorrida no sentido directo e L^- e L^+ são os segmentos do eixo real que unem Γ_R a γ_{ϵ} .

Com R suficientemente grande (basta $R > 1 + \epsilon$), a única singularidade de f no interior de $C_{\epsilon, R}$ é $z = e^{i\pi/3}$. Desta forma, pelo teorema dos resíduos:

$$\oint_{C_{\epsilon, R}} \frac{dz}{z^3 + 1} = 2\pi i \text{Res} \left(f, e^{i\pi/3} \right).$$

A singularidade $z = e^{i\pi/3}$ é um polo simples, e:

$$\begin{aligned} \text{Res} \left(f, e^{i\pi/3} \right) &= \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/3}} (z - e^{i\pi/3})f(z) = \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/3}} \frac{z - e^{i\pi/3}}{(z^3 + 1)} = \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/3}} \frac{1}{3z^2} \\ &= \frac{1}{3e^{2i\pi/3}} = \frac{1}{3 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)} = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

Assim:

$$\int_{L^- + L^+} \frac{dz}{z^3 + 1} + \int_{\gamma_{\epsilon}} \frac{dz}{z^3 + 1} + \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^3 + 1} = -2\pi i \frac{1 + i\sqrt{3}}{6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi i}{3} \quad (1)$$

Como $z = -1$ é um polo simples de f :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = -\pi i \text{Res}(f, -1) = -\pi i \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z+1}{z^3+1} = -\pi i \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{3z^2} = -\frac{\pi i}{3}$$

Por outro lado, e para $|z| = R$ (Nota: $R > 1 + \epsilon > 1$):

$$\left| \frac{1}{z^3+1} \right| \leq \frac{1}{||z^3|-1|} = \frac{1}{R^3-1}$$

Assim:

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^3+1} \right| \leq \int_{\Gamma_R} \left| \frac{1}{z^3+1} \right| |dz| \leq \frac{1}{R^3-1} \int_{\Gamma_R} |dz| = \frac{\pi R}{R^3-1} \rightarrow 0 \quad \text{quando } R \rightarrow \infty,$$

Logo:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^3+1} = 0.$$

Tomando agora o limite quando $R \rightarrow \infty$ e $\epsilon \rightarrow 0$ na igualdade (1), obtém-se

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^3+1} - \frac{\pi i}{3} = \frac{\pi \sqrt{3}}{3} - \frac{\pi i}{3}$$

ou seja:

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^3+1} = \frac{\pi \sqrt{3}}{3}$$

Finalmente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^3+1} = \frac{\pi \sqrt{3}}{3}$$

(2 val.) 4. Seja c_n o termo geral da sucessão real que verifica (num disco $D \subset \mathbb{C}$ apropriado):

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (2)$$

a) Mostre que (c_n) é a sucessão de Fibonacci, isto é, $c_0 = c_1 = 1$ e $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$, para qualquer $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$.

Resolução: Para qualquer z no interior do disco de convergência da série $\sum c_n z^n$, a equação (2) é equivalente a

$$(1-z-z^2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 1,$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+2} = 1.$$

Fazendo $m = n + 1$ e $k = n + 2$ na 2ª e 3ª séries, respectivamente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n - \sum_{m=1}^{\infty} c_{m-1} z^m - \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} z^k = 1.$$

Isto é equivalente a:

$$c_0 + c_1 z - c_0 z - \sum_{k=2}^{\infty} (c_n - c_{n-1} - c_{n-2}) z^n = 1 = 1 + 0z + 0z^2 + \dots$$

Igualando os coeficientes de ambas as séries, obtém-se:

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 - c_0 = 0 \\ c_n - c_{n-1} - c_{n-2} = 0 \text{ para } n \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = c_1 = 1 \\ c_n = c_{n-1} + c_{n-2} \text{ para } n \geq 2 \end{cases}$$

b) Determine explicitamente o termo geral da sucessão de Fibonacci.

Resolução: Para determinar os coeficientes c_n da série em (2), vamos utilizar a série geométrica para obter a série de Taylor de $\frac{1}{1-z-z^2}$.

As raízes de $1 - z - z^2$ são $z = -\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Factorizando o denominador e decompondo em fracções simples, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z-z^2} &= \frac{-1}{\left(z + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \left(z + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{z + \frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{z + \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}{1 + \frac{2z}{1+\sqrt{5}}} - \frac{\frac{2}{1-\sqrt{5}}}{1 + \frac{2z}{1-\sqrt{5}}} \right) \end{aligned}$$

Para

$$\left| \frac{2z}{1-\sqrt{5}} \right| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{também temos} \quad \left| \frac{2z}{1+\sqrt{5}} \right| < \left| \frac{2z}{1-\sqrt{5}} \right| < 1 \quad (3)$$

pelo que se obtém, para $|z| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z-z^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n z^n}{(1+\sqrt{5})^n} - \frac{2}{1-\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n z^n}{(1-\sqrt{5})^n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{(1+\sqrt{5})^{n+1}} - \frac{1}{(1-\sqrt{5})^{n+1}} \right) z^n. \end{aligned}$$

Resulta então que:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-1)^{n+1}2^{n+1} \left(\frac{1}{(1-\sqrt{5})^{n+1}} - \frac{1}{(1+\sqrt{5})^{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-1)^{n+1}2^{n+1} \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{(-4)^{n+1}} = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} \end{aligned}$$

c) Qual é o maior disco aberto centrado em 0 onde a igualdade (2) é válida?

Resolução: Pelo teorema de Taylor, o disco de convergência da série em (2) tem centro na origem e o seu raio é a distância da origem à singularidade mais próxima, ou seja:

$$R = \min \left\{ \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right|, \left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| \right\} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(2 val.) 5. Seja γ um caminho simples e fechado e D a componente conexa limitada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ (ou seja, interior à curva γ^*). Seja f uma função holomorfa em ext A tal que $\max_{|z|=R} |f(z)| \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$. Mostre que:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dz = \begin{cases} 0 & \text{se } z \in \text{int } A \\ -f(z) & \text{se } z \in \text{ext } A \end{cases}$$

A curva γ^* é percorrida por γ uma vez no sentido directo.

Caso 1: $z \in A = \text{int } A$

Neste caso, $w \mapsto f(w)/(w-z)$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus A$. Para qualquer R tão grande que $D(0, R) \subset \gamma^*$, resulta do teorema de Cauchy generalizado que:

$$\oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dz = \oint_{|w-z|=R} \frac{f(w)}{w-z} dz \quad (4)$$

Vamos agora estimar o 2º integral em (4). Seja $M(R) = \max_{|z|=R} |f(z)|$; sabemos, por hipótese do problema, que $M(R) \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$. Então:

$$\begin{aligned} \left| \oint_{|w-z|=R} \frac{f(w)}{w-z} dz \right| &\leq \oint_{|w-z|=R} \frac{|f(w)|}{|w-z|} |dz| \\ &\leq \frac{M(R)}{R} \oint_{|w-z|=R} |dw| = \frac{2\pi R M(R)}{R} = 2\pi M(R) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $R \rightarrow \infty$

Assim:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{|w-z|=R} \frac{f(w)}{w-z} dz = 0 \quad (5)$$

Fazendo $R \rightarrow \infty$ na igualdade (4), obtém-se o resultado pretendido.

Caso 2: $z \in \text{ext } A$

Neste caso, escolhemos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $D(z, \epsilon)$ não intersecta γ^* e $R > 0$ suficientemente grande tal que $D(z, R)$ contém $D(z, \epsilon)$ e γ^* . Note-se que $w \mapsto f(w)/(w-z)$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus (A \cup D(z, \epsilon))$; desta forma, pelo teorema de Cauchy generalizado:

$$\oint_{|w-z|=R} \frac{f(w)}{w-z} dz = \oint_{|w-z|=\epsilon} \frac{f(w)}{w-z} dz + \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dz \quad (6)$$

Pela fórmula integral de Cauchy:

$$\oint_{|w-z|=\epsilon} \frac{f(w)}{w-z} dz = 2\pi i f(z)$$

Tomando o limite quando $R \rightarrow \infty$ na igualdade (6) e utilizando (5) (que também é válido neste caso), tem-se:

$$0 = 2\pi i f(z) + \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dz$$

Isto implica o resultado pretendido.

Início do Teste / Exame (pág. 2)

(2 val.) **6.** Resolva o problema de valor inicial:

$$\left(\frac{3t^2}{x^2} - 3x \right) + (5x^2 - 9t) \frac{dx}{dt} = 0, \quad x(1) = -1.$$

Resolução: Considere-se

$$M(t, x) = \frac{3t^2}{x^2} - 3x \quad \text{e} \quad N(t, x) = 5x^2 - 9t$$

As funções M e N são continuamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mas não verificam $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$ em todo aquele domínio. Não se trata, pois, de uma equação exacta.

Vamos procurar um factor integrante, μ . Multiplicando ambos os membros da equação por $\mu(t, x)$, a condição de campo fechado para $\bar{M} = \mu M$ e $\bar{N} = \mu N$ é:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(t, x) \left(\frac{3t^2}{x^2} - 3x \right) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu(t, x) (5x^2 - 9t) \right),$$

ou seja,

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} \left(\frac{3t^2}{x^2} - 3x \right) + \left(-\frac{6t^2}{x^3} - 3 \right) \mu = \frac{\partial \mu}{\partial t} (5x^2 - 9t) - 9\mu$$

Vamos procurar um factor integrante dependente apenas de uma variável. Começamos por tentar $\mu = \mu(x)$, que parece ser o mais viável, dada a forma da equação anterior. Neste caso, $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x)$ e $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$, pelo que a equação do factor integrante reduz-se a:

$$\mu' \left(\frac{3t^2}{x^2} - 3x \right) = \left(-9 + \frac{6t^2}{x^3} + 3 \right) \mu = \left(\frac{6t^2}{x^3} - 6 \right) \mu = \frac{2}{x} \left(\frac{3t^2}{x^2} - 3x \right) \mu$$

Para $x \neq 0$, esta equação é equivalente a:

$$\mu' = \frac{2}{x} \mu$$

Uma solução desta equação linear homogénea é $\mu = x^2$.

Multiplicando agora a equação diferencial por $\mu(x) = x^2$, obtemos:

$$(3t^2 - 3x^3) + (5x^4 - 9tx^2) \frac{dx}{dt} = 0 \quad (7)$$

Trata-se efectivamente de uma equação exacta, pois $\frac{\partial \bar{M}}{\partial x} = 9x^2 = \frac{\partial \bar{N}}{\partial t}$. Em consequência, existe $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável tal que a equação (7) é equivalente a:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0 \quad (8)$$

Assim, y é solução da equação (7) se e só se $\Phi(t, y) = c$, para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Dito de outra forma, $\Phi(t, y) = c$ define implicitamente a solução geral da equação diferencial (7), com Φ verificando $\nabla \Phi = (\bar{M}, \bar{N})$. Assim:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 3t^2 - 3x^3 \Rightarrow \Phi(t, x) = \int 3t^2 - 3x^3 dt + c(x) = t^3 - 3x^3 t + c(x)$$

Por outro lado

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 5x^4 - 9tx^2 \Rightarrow -9x^2 t + c'(x) = 5x^4 - 9tx^2 \Rightarrow c(y) = x^5 + C$$

o que implica

$$\Phi(t, x) = t^3 - 3x^3 t + x^5 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

e a solução geral da equação é dada (implicitamente) por:

$$t^3 - 3x^3 t + x^5 = k, \quad k \in \mathbb{R} \quad (9)$$

Dado que $x(1) = -1$, resulta que (9) é solução do PVI se e só se $k = 3$. Por outro lado, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(1, -1) = \bar{N}(1, -1) = -4 \neq 0$, pelo que o teorema da função implícita garante a existência de uma única função que verifica $t^3 - 3x^3 t + x^5 = 3$ numa vizinhança de $t_0 = 1$. Pelo que vimos acima, podemos concluir que a solução do PVI é única numa vizinhança de $t_0 = 1$.

(2 val.) 7. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = N\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ y(1) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

onde:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -t \end{bmatrix}$$

a) Determine e^{Nt} .

Resolução: Começemos por notar que a matriz N é triangular inferior e as componentes da sua diagonal principal são todas nulas. Trata-se assim de uma matriz nilpotente; de facto:

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N^3 = \mathbf{0}$$

o que implica que $N^k = \mathbf{0}$, $\forall k \geq 3$

Assim, a série que define a exponencial de tN reduz-se à soma finita de termos:

$$\begin{aligned} e^{Nt} &= I + tN + \frac{t^2}{2}N^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 2t & t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ t^2/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 2t + t^2/2 & t & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Poder-se-ia obter e^{Nt} a partir da forma canónica de Jordan de N , embora por esse processo o cálculo seja mais longo.

b) Resolva o problema de valor inicial.

Resolução: Pela fórmula da variação das constantes, a solução do problema de valor inicial por ser calculada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= e^{N(t-1)}\mathbf{y}(1) + e^{Nt} \int_1^t e^{-Ns} \mathbf{b}(s) ds \\ &= e^{Nt} \int_1^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ s^2/2 & -s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -s \end{bmatrix} ds \\ &= e^{Nt} \int_1^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2s \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t^2/2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t-1 \\ 1-t^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ t-1 \\ 1-t \end{bmatrix} = (t-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2 val.) 8. Considere a equação diferencial:

$$y^{(3)} - 3y'' + 3y' - y = -t \quad (10)$$

a) Determine a solução geral de (10).

Resolução: A equação diferencial pode-se escrever como:

$$(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)y = -t$$

O polinómio característico é $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3$, que tem pois um único zero, $\lambda = 1$, de multiplicidade 3. A equação homogénea pode-se escrever na forma $(D - 1)^3 y = 0$, e a sua solução geral é:

$$y_H(t) = ae^t + bte^t + ct^2e^t$$

O polinómio aniquilador de $b(t) = -t$ é $P_A(D) = D^2$. Aplicando $P_A(D)$ a ambos os membros da equação diferencial, obtém-se:

$$D^2(D - 1)^3 y = D^2(-t) = 0$$

A solução geral desta equação é

$$y(t) = ae^t + bte^t + ct^2e^t + d + et,$$

pelo que uma solução particular da equação não homogénea (10) será da forma $y_p(t) = d + et$. Substituindo y por y_p em (10), obtém-se:

$$3e - d - et = -t \Rightarrow \begin{cases} 3e - d = 0 \\ -e = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 3 \\ e = 1 \end{cases}$$

Assim, a solução geral da equação (10) é:

$$y(t) = ae^t + bte^t + ct^2e^t + 3 + t.$$

b) Sendo A a matriz companheira da equação (10), escreva A e determine uma matriz solução fundamental de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Resolução: A equação (4) é uma equação linear de 3ª ordem, podendo por isso escrever-se na forma de uma equação vectorial linear de 1ª ordem:

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -t \end{bmatrix} \quad (11)$$

A matriz companheira da equação (10) é então:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Uma matriz solução fundamental de (11) é dada pela matriz wronskiana calculada a partir de três soluções linearmente independentes da equação homogênea $(D - 1)^3 y = 0$. Utilizando as soluções desta equação obtidas na alínea (a), temos:

$$W(e^t, te^t, t^2 e^t) = \begin{bmatrix} e^t & te^t & t^2 e^t \\ e^t & e^t + te^t & 2te^t + t^2 e^t \\ e^t & 2e^t + te^t & 2e^t + 4te^t + t^2 e^t \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ 1 & 1+t & 2t+t^2 \\ 1 & 2+t & 2+4t+t^2 \end{bmatrix}$$

- (2 val.) **9. a)** Calcule a série de Fourier de senos da função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - x$. Estude a série que obteve quanto à convergência pontual em $[0, 1]$.

Resolução: A série de Fourier de senos de f é

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(n\pi x),$$

onde os coeficientes b_n são dados por:

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 (1-x) \text{sen}(n\pi x) dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} (1-x) \cos(n\pi x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{n\pi} \cos(n\pi x) dx \\ &= \frac{2}{n\pi} - \frac{2}{n^2 \pi^2} \text{sen}(n\pi x) \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{n\pi} \end{aligned}$$

Seja $\bar{f}$ a extensão ímpar de f ao intervalo $[-1, 1]$. Atendendo a que $\bar{f}$ é contínua em $] -1, 0[\cup] 0, 1[$ tem-se, pelo Teorema da convergência pontual das séries de Fourier, que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(n\pi x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in] -1, 0[\cup] 0, 1[\\ \frac{\bar{f}(0^+) + \bar{f}(0^-)}{2} = 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\bar{f}(-1) + \bar{f}(1)}{2} = 0 & \text{se } x = \pm 1 \end{cases} \quad (12)$$

- b)** Determine a solução do problema de valores de fronteira:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -u + \frac{1}{1+t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{para } 0 < x < 1, t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

que verifica a condição inicial:

$$u(0, x) = f(x) \quad \text{para } 0 < x < 1$$

Resolução: Vamos procurar soluções não triviais do problema de valor de fronteira da forma $u(x, t) = X(x)T(t)$. Substituindo na equação diferencial, obtemos

$$X(x)T'(t) = -X(x)T(t) + \frac{1}{1+t}X''(x)T(t),$$

pelo que

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -1 + \frac{1}{1+t} \frac{X''(x)}{X(x)},$$

ou seja,

$$(1+t) \left(\frac{T'(t)}{T(t)} + 1 \right) = \frac{X''(x)}{X(x)},$$

Atendendo a que o primeiro membro é função apenas de t , e o segundo membro é função apenas de x , para que a igualdade se verifique para todos os valores de t e x ambos os membros terão forçosamente que ser iguais a uma mesma constante. Assim:

$$(1+t) \left(\frac{T'(t)}{T(t)} + 1 \right) = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Quanto às condições de fronteira, dado que

$$u(0, t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

e

$$u(1, t) = 0 \Rightarrow X(1)T(t) = 0 \Rightarrow X(1) = 0$$

(Note que para $u(t, x)$ ser não trivial, $T(t)$ não pode ser a função nula). Começemos por determinar as soluções não identicamente nulas do problema

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

O polinómio característico da equação é $P(R) = R^2 - \lambda$; as suas raízes são $\pm\sqrt{\lambda}$. Temos assim 3 possibilidades:

- Se $\lambda = 0$, a raíz é 0 com multiplicidade 2, pelo que a solução geral da equação diferencial é dada por $X(x) = A + Bx$. Pelas condições de fronteira conclui-se que a única solução do problema com $\lambda = 0$ é a solução nula.
- Se $\lambda > 0$ as raízes são $\pm\mu \in \mathbb{R}$ (onde considerámos $\lambda = \mu^2$), pelo que a solução geral da equação diferencial é dada por $X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$. Pelas condições de fronteira conclui-se que a única solução do problema com $\lambda > 0$ é a solução nula.
- Se $\lambda < 0$ as raízes são $\pm i\mu$ (onde considerámos $\lambda = -\mu^2$), pelo que a solução geral da equação diferencial é dada por $X(x) = A\sin(\mu x) + B\cos(\mu x)$. Pelas condições de fronteira conclui-se que $B = 0$ e $\mu = n\pi$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\lambda = -\pi^2 n^2$, a que corresponde $X(x) = \sin(n\pi x)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Para $\lambda = -\pi^2 n^2$, uma solução da equação (separável)

$$(1+t) \left(\frac{T'(t)}{T(t)} + 1 \right) = -\pi^2 n^2 \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = -\frac{\pi^2 n^2}{1+t} - 1$$

é dada por

$$T(t) = (1+t)^{-n^2 \pi^2} e^{-t} \quad (t \geq 0)$$

Temos então, que para cada $n \in \mathbb{N}$, as funções

$$u_n(x, t) = (1+t)^{-n^2 \pi^2} e^{-t} \text{sen}(n\pi x)$$

são soluções da equação diferencial parcial e verificam as condições de fronteira. Por linearidade, quaisquer combinações lineares (finitas) também verificarão a equação e as condições de fronteira. Assim

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n (1+t)^{-n^2 \pi^2} e^{-t} \text{sen}(n\pi x)$$

é (formalmente) solução do problema de valores de fronteira. Atendendo à condição inicial,

$$f(x) = u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}(n\pi x),$$

Da alínea (a), resulta que, para qualquer $x \in]0, 1[$:

$$B_n = \frac{2}{n\pi} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim a solução do problema será:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (1+t)^{-n^2 \pi^2} e^{-t} \text{sen}(n\pi x)$$

Facultativamente, poderia provar que de facto $u(t, x)$ é solução do problema, mostrando que a série anterior converge uniformemente em $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \geq \tau \wedge 0 \leq x \leq 1\}$, para qualquer $\tau > 0$. De facto,

$$\left| \frac{2}{n\pi} (1+t)^{-n^2 \pi^2} e^{-t} \text{sen}(n\pi x) \right| < (1+\tau)^{-n^2 \pi^2} = r^{-n^2} < r^{-n}$$

com $r = (1+\tau)^{-\pi^2} < 1$. Visto que, nestas condições, $\sum r^n$ é convergente, o teste-M de Weierstrass garante assim a convergência uniforme da série em $[\tau, +\infty[\times [0, 1]$.

(2 val.) **10.** Considere o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y + e^{-(t+y^4)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- a) Mostre que o problema tem solução única definida numa vizinhança de 0 , $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$.

Resolução: A função $f(t, y) = y + e^{-(t+y^4)}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, logo é localmente lipshitziana relativamente a y em $\mathbb{R}^2$. Pelo teorema de Picard, existe solução única do problema de valor inicial numa vizinhança de $t_0 = 0$, ou seja, num intervalo $] - \alpha, \alpha[$, para certo $\alpha > 0$.

- b) Mostre que o intervalo máximo de solução do problema contém $[0, \infty[$ e determine $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.

Resolução: Como $0 \leq e^{-(t+y^4)} \leq 1$ então:

$$y \leq y + e^{-(t+y^4)} \leq y + 1,$$

para qualquer $(t, y) \in \mathbb{R}^2$.

O problema:

$$\begin{cases} u' = u \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

tem solução única, que é dada por $u(t) = e^t$. Por outro lado, o problema

$$\begin{cases} v' = v + 1 \\ v(0) = 1 \end{cases}$$

tem também solução única, neste caso dada por $v(t) = 2e^t - 1$.

Aplicando o teorema de comparação, concluímos que:

$$e^t \leq y(t) \leq 2e^t - 1 \quad \forall t \geq 0 \quad (13)$$

Estas desigualdades mostram que $y(t)$ não explode em tempo finito no intervalo $[0, +\infty[$. Como f é contínua e localmente lipshitziana em $\mathbb{R}^2$, o teorema de extensão de solução garante então que a solução do problema de valor inicial pode ser extendida ao intervalo $] - \alpha, +\infty[$.

Tomando o limite quando $t \rightarrow +\infty$ em (13), concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$$

- c) Escreva uma equação integral que é equivalente ao P.V.I. para $y \in C^1([-\alpha, \alpha])$.

Resolução: Uma equação integral equivalente ao P.V.I. em $] - \alpha, \alpha[$ é:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t f(s, y(s)) ds$$

ou seja, no nosso caso:

$$y(t) = 1 + \int_0^t (y(s) + e^{-(s+(y(s))^4)}) ds.$$