



Análise Matemática IV - A

2º Semestre 2006/2007

2º Teste e 1º Exame — LMAC, LEFT, LEBM, LEA

21 de Junho de 2007

Duração: 3h (exame) ou 1h 30min (teste).

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Exame (pág. 1)

(2 val.) 1. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa em $\mathbb{C}$ tal que $f(0) = 1$ e:

$$\operatorname{Im} f(x + iy) = \operatorname{sh} 2x \operatorname{sen} 2y, \quad \text{para todos os } x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Determine $f(z)$, para qualquer $z \in \mathbb{C}$.

b) Sendo γ um caminho fechado tal que $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z + i\pi} = 100$, calcule:

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z^2)}{z + i\pi} dz.$$

(2 val.) 2. Calcule o integral

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z^{100} - 1)(z + 7)},$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido directo.

(2 val.) 3. Utilizando o teorema dos resíduos, calcule o integral impróprio:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3 + 1} dx$$

(2 val.) 4. Seja c_n o termo geral da sucessão real que verifica (num disco $D \subset \mathbb{C}$ apropriado):

$$\frac{1}{1 - z - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (1)$$

a) Mostre que (c_n) é a sucessão de Fibonacci, isto é, $c_0 = c_1 = 1$ e $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$, para qualquer $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$.

b) Determine explicitamente o termo geral da sucessão de Fibonacci.

c) Indique o maior disco aberto centrado em 0 onde a igualdade (1) é válida?

(2 val.) 5. Seja γ um caminho simples e fechado e D a componente conexa limitada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ (ou seja, interior à curva γ^*). Seja f uma função holomorfa em $\mathbb{C} \setminus D$ tal que $\max_{|z|=R} |f(z)| \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$. Mostre que:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = \begin{cases} 0 & \text{se } z \in \operatorname{int} D \\ -f(z) & \text{se } z \in \operatorname{ext} D \end{cases}$$

A curva γ^* é percorrida por γ uma vez no sentido directo.

V.F.F

Início do Teste / Exame (pág. 2)

(2 val.) **6.** Resolva o problema de valor inicial:

$$\left(\frac{3t^2}{x^2} - 3x\right) + (5x^2 - 9t) \frac{dx}{dt} = 0, \quad x(1) = -1.$$

(2 val.) **7.** Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = N\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{y}(1) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

onde:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -t \end{bmatrix}$$

a) Determine e^{Nt} .

b) Resolva o problema de valor inicial.

(2 val.) **8.** Considere a equação diferencial:

$$y^{(3)} - 3y'' + 3y' - y = -t \quad (2)$$

a) Determine a solução geral de (2).

b) Sendo A a matriz companheira da equação (2), escreva A e determine uma matriz solução fundamental de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

(2 val.) **9. a)** Calcule a série de Fourier de senos da função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - x$. Estude a série que obteve quanto à convergência pontual em $[0, 1]$.

b) Determine a solução do problema de valores de fronteira:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -u + \frac{1}{1+t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{para } 0 < x < 1, t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

que verifica a condição inicial:

$$u(0, x) = f(x) \quad \text{para } 0 < x < 1$$

(2 val.) **10.** Considere o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y + e^{-(t+y^4)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) Mostre que o problema tem solução única definida numa vizinhança de $0,]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$.

b) Mostre que o intervalo máximo de solução do problema contém $[0, \infty[$ e determine $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.

c) Escreva uma equação integral que lhe é equivalente para $y \in C^1([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha])$.