

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2020/2021

Ficha de Problemas nº 8a

Existência, unicidade, prolongamento e comparação de soluções

1 Exercícios Resolvidos

1. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções .

$$(a) y' = \frac{ty}{1+t^2}, \quad (b) y' = (2-y)(y-1),$$

$$(c) y' = y(1-y^2), \quad (d) y' = \frac{y+t}{y-t},$$

O que é um campo de direcções?

Um campo de direcções da equação diferencial

$$y' = f(t, y)$$

é um gráfico constituído por segmentos de recta orientados com origem em cada ponto, $(t, y) \in \mathbb{R}^2$, onde f está definida. Cada um desses segmentos de recta deve ser tangente ao gráfico da solução da equação diferencial no ponto (t, y) ; ele é, na verdade, uma representação miniaturizada da recta tangente ao gráfico da solução da equação diferencial que passa no ponto (t, y) .

Pode-se traçar um campo de direcções de qualquer equação diferencial da forma $y' = f(x, y)$, mas o mesmo só tem utilidade quando f satisfaz as condições do teorema de Picard. Em particular, a unicidade de solução dos problemas de valor inicial é muito importante porque impede que os gráficos de duas soluções com condições iniciais distintas se intersectem; e isto possibilita o posicionamento relativo desses gráficos.

Como traçar um campo de direcções?

Para traçar um campo de direcções constroi-se um reticulado, por exemplo,

$$\{(n, m) : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

e calcula-se em todos os seus pontos o valor de $f(n, m)$. Os valores obtidos são o declive da recta tangente ao gráfico de $y(x)$ no ponto (n, m) . Desenha-se então um pequeno segmento com origem em (n, m) e com declive $f(n, m)$.

Uma vez traçado o campo de direções traçado podemos usá-lo para esboçar as soluções da equação diferencial. Se estivermos nas condições do teorema de Picard, a unicidade de solução de qualquer problema de valor inicial garante que duas soluções com origem em pontos iniciais distintos nunca se intersectam. Dado que este traçado envolve erros, é a unicidade de solução que torna possível o esboço de soluções qualitativamente semelhantes às soluções exactas.

Exemplo

Vamos traçar o campo de direções e esboçar algumas soluções da equação diferencial

$$y' = y - x$$

Vamos calcular y' usando alguns valores de $(x, y) \in \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2, -2 \leq n, m \leq 2\}$. Assim para $x = -2$

y	-2	-1	0	1	2
y'	0	1	2	3	4

Para $x = -1$

y	-2	-1	0	1	2
y'	-1	0	1	2	3

Para $x = 0$

y	-2	-1	0	1	2
y'	-2	-1	0	1	2

Para $x = 1$

y	-2	-1	0	1	2
y'	-3	-2	-1	0	1

e para $x = 2$

y	-2	-1	0	1	2
y'	-4	-3	-2	-1	0

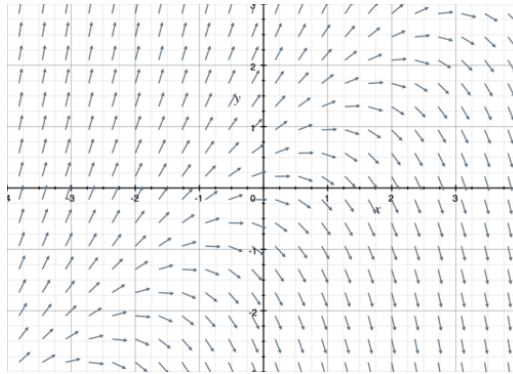


Figura 1: Campo de direções de $y' = y - x$

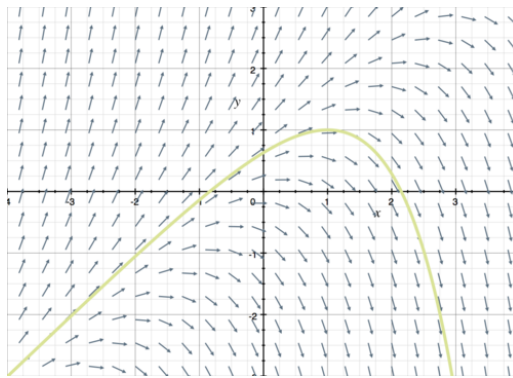


Figura 2: Campo de direções de $y' = y - x$ e a solução que passa em $(1, 1)$

Resolva os problemas cuja solução se apresenta de seguida.

Solução:

(a) $y' = \frac{t y}{1 + t^2}$

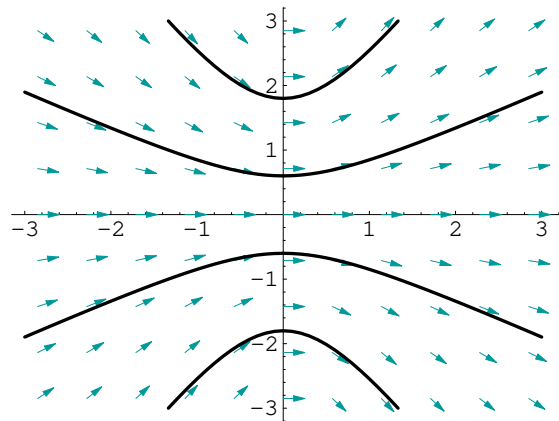


Figura 3: Campo de direções e algumas soluções de $y' = \frac{t y}{1 + t^2}$

(b) $y' = (2 - y)(y - 1)$

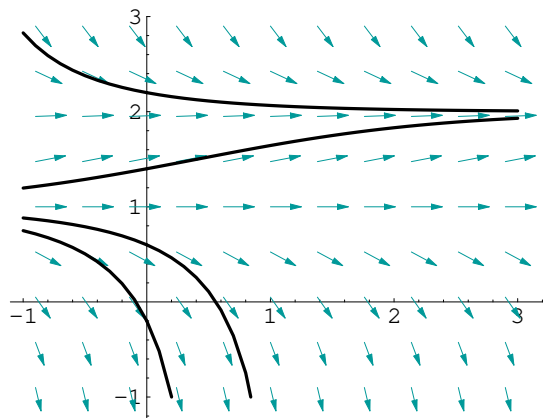


Figura 4: Campo de direções e algumas soluções de $y' = (2 - y)(y - 1)$

(c) $y' = y(1 - y^2)$

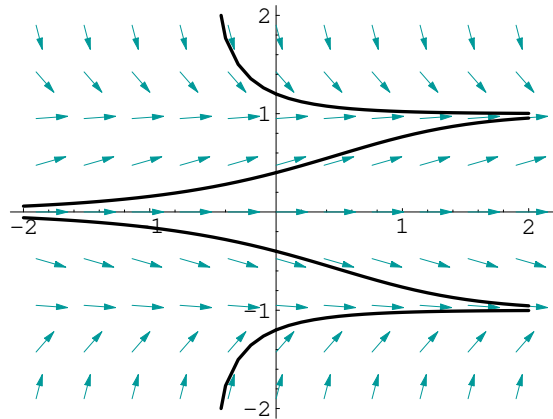


Figura 5: Campo de direções e algumas soluções de $y' = y(1 - y^2)$

(d) $y' = \frac{y + t}{y - t}$

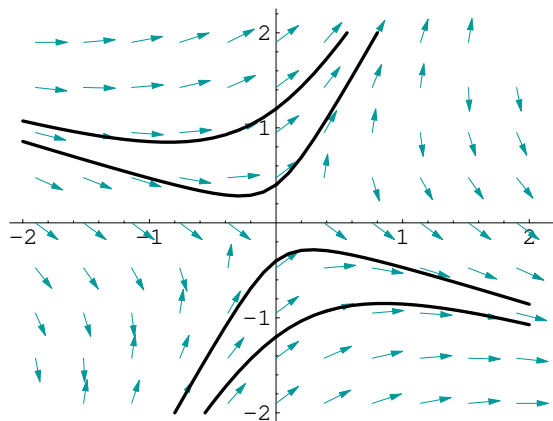


Figura 6: Campo de direções e algumas soluções de $y' = \frac{y + t}{y - t}$

2. Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 2ty^{2/3} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

tem infinitas soluções, e explique porque esse facto não contradiz o Teorema de Picard.

Resolução

Começamos por notar que a solução constante $y(t) \equiv 0$ é solução do PVI. Por outro lado, se $y(t) \neq 0$ a equação pode ser escrita na forma

$$y^{-2/3} \frac{dy}{dt} = 2t \Leftrightarrow \int y^{-2/3} dy = \int 2t dt + c \Leftrightarrow 3y^{1/3} = t^2 + c \Leftrightarrow y(t) = \left(\frac{t^2 + c}{3} \right)^3$$

Visto termos obtido uma função polinomial, verifica-se que estas soluções são de classe C^1 em \mathbb{R} e também verificam a equação diferencial quando $c \leq 0$ e $y(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{-c}$ (basta substituir a solução geral obtida na equação diferencial). A solução que verifica a condição inicial $y(0) = 0$ é

$$y(t) = \frac{t^6}{27},$$

pelo que acabámos de obter uma segunda solução do PVI.

Podemos agora utilizar o método de “cortar” e “colar” a solução geral

$$y(t) = \frac{(t^2 + c)^3}{27} \quad \text{e} \quad y(t) \equiv 0$$

e, dessa forma, obter novas soluções do PVI. Para isso é certamente necessário tomar c tal que a função obtida é contínua no ponto de “colagem” (que designamos por t_1):

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \left(\frac{t^2 + c}{3} \right)^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -t_1^2$$

Assim, para $t_1 > 0$, define-se

$$y_{t_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq t_1 \\ \frac{(t^2 - t_1^2)^3}{27} & \text{se } t > t_1 \end{cases}$$

Calculando também as derivadas laterais de y_{t_1} no ponto de “colagem” (exercício) verifica-se que

$$f'_d(t_1) = 0 = f'_e(t_1)$$

Desta forma, y_{t_1} é diferenciável em \mathbb{R} e verifica a equação diferencial para qualquer $t \in \mathbb{R}$; note que foi construída à custa de soluções da equação diferencial, portanto só faltava verificar que a satisfazia também no ponto de “colagem”. Além disso, $y_{t_1}(0) = 0$.

De igual modo, para cada $t_2 < 0$

$$y_{t_2}(t) = \begin{cases} \frac{(t^3 - t_2^2)^3}{27} & \text{se } t < s_0 \\ 0 & \text{se } t \geq s_0 \end{cases}$$

é também solução do PVI.

Finalmente, o facto de existir uma infinidade de soluções deve-se a que a função $f(t, y) = 2ty^{2/3}$ é contínua em $y \geq 0$, mas não é de classe C^1 em qualquer conjunto que contenha pontos da forma $(t, 0)$. De facto:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4t}{3} y^{-1/3} = \frac{4t}{3\sqrt[3]{y}} \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad y \rightarrow 0^+.$$

3. Para p um número real $1 < p < 2$ considere

$$f(t, y) = p|y|^{\frac{p-1}{p}}, \quad (t, y) \in \mathbb{R}^2$$

Considere-se o (PVI)

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = 0$$

Mostre que o (PVI) admite uma infinidade de soluções. Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

Resolução

Uma das soluções do (PVI) é a solução constante $y_c(t) \equiv 0$. Por outro lado, se $y(t) > 0$ a equação pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{p} y^{-\frac{p-1}{p}} \frac{dy}{dt} = p \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\int \frac{1}{p} y^{-1+\frac{1}{p}} dy \right) = 1 \Leftrightarrow y^{1/p} = t + c \Leftrightarrow y(t) = (t + c)^p$$

Esta solução é continuamente diferenciável e verifica a equação para qualquer $t \in \mathbb{R}$. A condição inicial $y(0) = 0$ é satisfeita se tomarmos $c = 0$; assim sendo, outra solução do PVI é

$$y(t) = t^p$$

Podemos ainda definir outras duas funções “cortando e colando” estas duas soluções:

$$y^+(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ t^p & \text{se } t > 0 \end{cases}, \quad y^-(t) = \begin{cases} t^p & \text{se } t \leq 0 \\ 0 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

Verifica-se que

- $y^+(t)$ e $y^-(t)$ são diferenciáveis em \mathbb{R} (note-se que, como $p > 1$ em ambos os casos a derivada em 0 existe e é 0)
- $y^+(t)$ e $y^-(t)$ são soluções da equação diferencial.
- $y^+(0) = y^-(0) = 0$

Conclui-se que ambas são soluções do PVI.

Finalmente, utilizando a solução geral da equação

$$y(t) = (t - k)^p$$

(onde fizemos $k = -c$) e a solução nula, podemos construir uma infinidade de soluções:

$$y_k^+(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq k \\ (t - k)^p & \text{se } t > k \end{cases} \quad \text{tomando } k > 0.$$

$$y_k^-(t) = \begin{cases} (t - k)^p & \text{se } t \leq k \\ 0 & \text{se } t > k \end{cases} \quad \text{tomando } k < 0.$$

Para verificar que não há contradição entre estas conclusões e o Teorema de Picard, note-se que f é contínua em \mathbb{R}^2 e

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{p-1}{p} y^{-\frac{1}{p}} = \infty$$

pelo que f não é de classe C^1 em qualquer conjunto que contenha pontos da recta $y = 0$.

Concluimos então que a continuidade de f implica existência de solução do PVI, mas o facto de f não ser de classe C^1 numa vizinhança de $(0, 0)$ abre a possibilidade de que a unicidade de solução do PVI possa falhar.

4. Seja $z(t) \geq 0$ é uma função real contínua tal que

$$z(t) \leq C + k \int_0^t z(s) ds, \quad (1)$$

para $t \geq 0$, onde C e k são constantes reais positivas. Prove a seguinte desigualdade:

$$z(t) \leq Ce^{kt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Esta proposição é uma versão simples da conhecida *desigualdade de Gronwall*, sendo muito usada na teoria qualitativa das equações diferenciais.

Resolução

Considere-se a função v definida em $[0, +\infty[$ pelo segundo membro de (1):

$$v(t) \stackrel{\text{def}}{=} C + k \int_0^t z(s) ds$$

Note que, por hipótese, $z(t) \leq v(t)$. Pelo teorema fundamental do cálculo, v é de classe C^1 e a sua derivada é dada por:

$$v'(t) = kv(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Esta equação é equivalente a:

$$v'(t) - kv(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-kt}v'(t) - ke^{-kt}v(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(e^{-kt}v(t) \right) = 0.$$

Isto significa que a função $e^{kt}v(t)$ é constante; em particular, para qualquer $t \geq 0$,

$$e^{-kt}v(t) = v(0).$$

Conclui-se então que:

$$u(t) \leq v(t) = v(0)e^{kt} = Ce^{kt}.$$

5. Dados dois números reais, b_0 e b_1 , arbitrários, considere os problemas de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = b_0$$

e

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = b_1$$

e as respectivas soluções:

$$y_0(t) = y(t, 0, b_0) \quad \text{e} \quad y_1(t) = y(t, 0, b_1).$$

Suponha também que f é de classe C^1 em \mathbb{R}^2 e $\frac{\partial f}{\partial y}$ é limitada em \mathbb{R}^2 .

Determine uma função $\varphi(t)$ tal que

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq |b_1 - b_0| \varphi(t) \quad (2)$$

para todo o $t \geq 0$. Esta proposição mostra a *dependência contínua* das soluções do PVI da condição inicial.

Sugestão: Utilize a desigualdade de Gronwall (veja o problema anterior).

Resolução:

Dado que $y_0(t)$ é solução do primeiro PVI então

$$y_0(t) = b_0 + \int_0^t f(s, y_0(s)) ds$$

e analogamente, sendo $y_1(t)$ solução do segundo PVI,

$$y_1(t) = b_1 + \int_0^t f(s, y_1(s)) ds$$

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_0(t)| &= \left| b_1 + \int_0^t f(s, y_1(s)) ds - b_0 - \int_0^t f(s, y_0(s)) ds \right| \\ &\leq |b_1 - b_0| + \int_0^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))| ds \end{aligned}$$

Visto $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq K$ em \mathbb{R}^2 , para certo $K > 0$, então pelo teorema de Lagrange existe $c = c(s)$ (no intervalo de extremos $y_1(s)$ e $y_0(s)$) tal que:

$$|f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, c) \right| |y_1(s) - y_0(s)| \leq K |y_1(s) - y_0(s)| \quad (3)$$

A desigualdade (3) designa-se por **condição de Lipshitz** relativa a y ; K diz-se a **constante de Lipshitz** de f . Desta forma,

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq |b_1 - b_0| + K \int_0^t |y_1(s) - y_0(s)| ds$$

onde K é a constante de Lipschitz de f . Aplicando a desigualdade de Gronwall com $C = |x_1 - x_0| > 0$ e $z(t) = |x_1(t) - x_0(t)| \geq 0$:

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq |b_1 - b_0| e^{Kt}.$$

Podemos assim tomar $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{Kt}$ em (2).

6. Mostre que o problema de valor inicial (abrev. PVI)

$$x' = e^{\cos x}, \quad x(0) = 0$$

tem uma solução única em \mathbb{R} .

Resolução:

Considere-se $f(t, x) = e^{\cos x}$. Observa-se o seguinte

- $f(t, x)$ está definida e é contínua em \mathbb{R}^2
- $\frac{\partial f}{\partial x} = -\text{sen } x e^{\cos x}$ está definida e é contínua em \mathbb{R}^2
- A condição inicial $(t_0, x_0) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$

Tem-se então que as condições do teorema de Picard são verificadas em \mathbb{R}^2 e, como tal, o PVI admite uma única solução definida, $x_s(t)$, definida para t numa vizinhança de 0. Para demonstrar que a solução está definida em \mathbb{R} vamos usar o teorema da extensão de soluções: esse teorema diz-nos que se o PVI satisfaz as condições do teorema de Picard então a solução única, $x(t)$, pode ser prolongada a um intervalo maximal, $]a, b[$. Esse intervalo será \mathbb{R} a não ser que a solução $x(t)$ exploda quando $t \rightarrow b^-$ (ou quando $t \rightarrow a^+$).

Para mostrar que tal não pode acontecer vejamos em primeiro lugar que, para todo o $(t, x) \in \mathbb{R}^2$,

$$|\cos x| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |f(t, x)| \leq e.$$

Considere-se o PVI auxiliar

$$u' = c, \quad u(0) = 0,$$

(com $c = \pm e$) cuja solução é $x(t) = ct$ (definida em \mathbb{R}). Pelo teorema da comparação de soluções, e tendo em conta que $-e \leq f(t, x) \leq e$,

$$-et \leq x(t) \leq et \quad \forall t \geq 0 \quad \text{e} \quad et \leq x(t) \leq -et \quad \forall t \leq 0$$

Mas isto mostra que

$$|x(t)| \leq e|t| \quad \forall t \in]a, b[.$$

Por isso, $x(t)$ não pode explodir, pelo que está definida em \mathbb{R} .

7. Considere o PVI

$$x' = \frac{e^x}{1 + e^x}, \quad x(0) = 0.$$

Mostre que existe uma solução única definida em \mathbb{R} .

Resolução:

Considere-se $f(t, x) = \frac{e^x}{1+e^x}$. Observa-se o seguinte

- $f(t, x)$ está definida e é contínua em \mathbb{R}^2
- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ está definida e é contínua em \mathbb{R}^2
- A condição inicial $(t_0, x_0) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$

Tem-se então que as condições do teorema de Picard são verificadas em \mathbb{R}^2 e, como tal, o PVI admite uma única solução definida, $x(t)$, definida para t numa vizinhança de 0. Atendendo a que

$$|f(t, x)| \leq 1, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

e procedendo como no problema anterior, o teorema da comparação de soluções mostra-nos que

$$|x(t)| \leq |t|$$

no intervalo onde $x(t)$ está definida. Isto mostra que a solução não explode, pelo que está definida em \mathbb{R} .

8. Considere-se o problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = t^2 + y^2, \quad y(1) = 0$$

Mostre que existe $\theta \in]1, 1 + \frac{\pi}{2}]$ tal que $\lim_{t \rightarrow \theta} y(t) = +\infty$, ou seja, a solução $y(t)$ do PVI explode quando $t \rightarrow \theta$.

Resolução:

Temos, para $t > 1$, $\frac{dy}{dt} > y^2 + 1$ ou seja $\frac{1}{y^2+1} \frac{dy}{dt} \geq 1$. Integrando ambos os membros desta desigualdade entre 1 e t , obtém-se:

$$\operatorname{arctg}(y(t)) - \underbrace{\operatorname{arctg}(y(1))}_0 = t - 1$$

pois que $\operatorname{arctg} y \geq t + c$. Assim, a solução do PVI verifica

$$y(t) \geq \operatorname{tg}(t - 1).$$

Tendo em conta que $\lim_{t \rightarrow 1 + \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(t - 1) = +\infty$, então existe $\theta \in]1, 1 + \frac{\pi}{2}]$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \theta} y(t) = +\infty.$$

9. Considere o problema de valor inicial

$$x' = \frac{x \cos(t + x)}{1 + 2x^2}, \quad x(0) = 1$$

Mostre que o intervalo máximo de existência de solução é \mathbb{R} .

Resolução:

A função $f(t, x) = \frac{x \cos(t+x)}{1+2x^2}$ é contínua em \mathbb{R}^2 e é fácil de verificar que também $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em \mathbb{R}^2 . Pelo Teorema de Picard conclui-se que o PVI admite solução única numa vizinhança do valor inicial $t_0 = 0$. Estimando o módulo de $f(t, x)$:

$$|f(t, x)| = \left| \frac{x \cos(t+x)}{1+2x^2} \right| \leq \frac{|x|}{1+2x^2} \leq 1$$

Aplicando o teorema da comparação de soluções da forma usual, verifica-se que a solução $x(t)$ do PVI satisfaz:

$$1 - t \leq x(t) \leq 1 + t \quad \forall t \geq 0$$

$$1 + t \leq x(t) \leq 1 - t \quad \forall t \leq 0$$

Isto prova que a solução não explode. Como o domínio de f é \mathbb{R}^2 , pelo teorema de extensão de soluções o intervalo máximo de existência é \mathbb{R} .

10. Mostre que o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{3y^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}} \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

tem uma única solução $y(t)$, definida para $t \in [0, +\infty[$, e calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$.

Sugestão. Não tente resolver a equação diferencial. Considere a função $u(t)$ definida por

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{1}{3u^2} \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Determine explicitamente a função $u(t)$ e mostre que

$$\frac{dy}{dt} \geq \frac{1}{3(u(t))^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}}.$$

Depois, integre ambos os membros desta desigualdade entre 0 e t .

Resolução:

Definindo

$$f(t, y) = \frac{1}{3y^2 + (t+1)^{\frac{2}{3}}}$$

o domínio de f é

$$D = \left\{ (t, y) \in \mathbb{R}^2 : 3y^2 + (t+1)^{\frac{2}{3}} \neq 0 \right\} = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ (t, y) = (-1, 0) \right\}$$

Começemos por mostrar existência e unicidade de solução local. Verifica-se facilmente que tanto f como $\partial f / \partial y$ são contínuas em D ; como também $(t_0, y_0) = (0, 1) \in D$, o teorema de Picard assegura existência de uma única solução local do PVI. Isto significa que a solução, $y(t)$, existe e é única para $t \in]-\beta, \beta[$. Em particular, existe uma única solução, $y(t)$, do PVI no intervalo $I = [0, \beta[$. Falta mostrar que podemos tomar $\beta = \infty$, nesta última afirmação.

Pelo teorema de extensão de solução, basta mostrar que nem $(t, y(t))$ converge para fronteira de D quando $t \rightarrow \beta$, nem $|y(t)| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \beta$. Como não conhecemos a solução do PVI, teremos que usar o teorema de comparação de soluções.

Como estamos a estudar a solução para $t \geq 0$, e como não existe qualquer ponto fronteiro de D para $t \geq 0$, podemos desde já descartar a possibilidade de $(t, y(t))$ atingir a fronteira de D quando $t \rightarrow \beta$.

Para verificar que a solução não explode, basta ter em conta que, para $t \geq 0$,

$$3y^2 + (t + 1)^{\frac{2}{3}} \geq 0 + 1^{\frac{2}{3}} = 1$$

Assim sendo,

$$0 \leq f(t, y) \leq 1 \quad (4)$$

para $y \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$. Considerando os problemas de valor inicial (com $c = 0$ ou $c = 1$)

$$\begin{cases} \dot{u} = c \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

cujas únicas soluções (em $[0, +\infty[$) são dadas por $u(t) = ct + 1$. Usando as desigualdades (4) e o teorema de comparação de soluções, resulta que:

$$1 \leq y(t) \leq t + 1, \quad \forall t \geq 0. \quad (5)$$

De (5) podemos concluir que

$y(t)$ não explode no extremo superior do intervalo máximo de solução;

$y(t) \geq 1$ para $t \geq 0$.

Desta forma, o teorema de extensão de solução diz-nos que a $y(t)$ está definida no intervalo $I = [0, +\infty[$. Para calcular o limite de $y(t)$ quando $t \rightarrow +\infty$, consideremos o PVI auxiliar

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{1}{3u^2} \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

A solução geral da equação separável $3u^2 \frac{du}{dt} = 1$ é $u^3 = t + c$, com $c \in \mathbb{R}$. Usando a condição inicial obtém-se $u(t) = (t + 1)^{\frac{1}{3}}$, estando esta solução definida em $[0, +\infty[$. Tendo em conta que, para $y \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$,

$$f(t, y) = \frac{1}{3y^2 + (t + 1)^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{1}{3y^3},$$

pelo teorema de comparação de soluções podemos concluir que

$$y(t) \leq u(t) = (t + 1)^{\frac{1}{3}}, \quad \forall t \geq 0.$$

Mas então:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3(y(t))^2 + (t + 1)^{\frac{2}{3}}} \geq \frac{1}{3(u(t))^2 + (t + 1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{4(t + 1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{4}(t + 1)^{-\frac{2}{3}}$$

Integrando ambos os membros desta desigualdade entre 0 e t , obtém-se

$$y(t) - \underbrace{y(0)}_1 \geq \frac{1}{4} \int_0^t (s + 1)^{-\frac{2}{3}} ds = \frac{3}{4} (s + 1)^{\frac{1}{3}} \Big|_0^t = \frac{3}{4} (t + 1)^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{4},$$

ou seja,

$$y(t) \geq \frac{3}{4}(t+1)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4} \longrightarrow +\infty \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty.$$

Podemos assim concluir que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty.$$

2 Exercícios Propostos

1. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções .

$$(a) \quad y' = \frac{ty}{1+t^2} \quad (b) \quad y' = (2-y)(y-1) \quad (c) \quad y' = y(1-y^2) \quad (d) \quad y' = \frac{y+t}{y-t}$$

2. Mostre que existe uma solução de classe C^1 para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 6t\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

diferente da solução $y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

3. Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y^{1/2} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

tem infinitas soluções, e explique porque esse facto não contradiz o Teorema de Picard.

4. Majorando e minorando as seguintes equações, obtenha estimativas para os intervalos máximos de definição dos problemas de valor inicial indicados.

$$(a) \quad \frac{dy}{dt} = \arctg(ty), \quad y(0) = 2 \quad (b) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{e^{\cos(ty)}}{y^3}, \quad y(0) = 1$$

$$(c) \quad \frac{dy}{dt} = y^2 e^y, \quad y(0) = 1$$

Nota: Em (c), a função constante igual a 0 é uma solução da equação.

5. Determine o limite quando $t \rightarrow \infty$ da solução do problema de valor inicial

$$\left(e^y + \operatorname{sen}^4 y \right) y' = y - y^4 \quad , \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

6. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} (1-t)y \frac{dy}{dt} = 1 - y^2 \\ y(1/2) = 2 \end{cases}$$

- (a) Determine uma solução do PVI, e justifique que essa é a única solução do problema numa vizinhança suficientemente pequena de $\frac{1}{2}$ onde esteja definida.
- (b) Mostre que o PVI admite um número infinito de soluções definidas em \mathbb{R} .
- (c) Diga, justificando, porque não há contradição ao Teorema de Picard.

7. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t(1 + y^2) \quad , \quad y(1) = 0 \tag{6}$$

- (i) Determine a solução de (6) e indique o seu intervalo máximo de solução.
- (ii) Considere agora o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t(1 + y^2)e^y \quad , \quad y(1) = 0$$

- (a) Sem tentar resolver a equação, justifique que o problema tem localmente uma e uma só solução.
- (b) Mostre que o intervalo máximo de existência de solução é limitado superiormente, isto é, existe $\beta > 1$ tal que $\lim_{t \rightarrow \beta^-} y(t) = \pm\infty$.

Sugestão: Comece por mostrar que a solução é uma função crescente para $t > 1$, e relacione com o problema (6).

8. Considere o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y + e^{-(t+y^4)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- (a) Mostre que o problema tem solução única definida numa vizinhança de $0,] - \alpha, \alpha[$.
- (b) Mostre que o intervalo máximo de solução do problema contém $[0, \infty[$ e determine $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.

(c) Escreva uma equação integral que é equivalente ao P.V.I. para $y \in C^1([-\alpha, \alpha])$.

9. Considere a equação

$$\frac{dy}{dt} = \cos(t + e^y)$$

(a) Justifique que a solução de qualquer problema de valor inicial $y(t_0) = y_0$ é única.

(b) Mostre que a solução do problema de valor inicial $y(0) = 0$ satisfaz $-t \leq y(t) \leq t$ para $t \geq 0$.

(c) Mais geralmente, mostre que

$$|y(t) - y_0| \leq |t - t_0| \quad \forall t$$

(d) Determine os intervalos máximos de definição das soluções desta equação.

10. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(t, 0) = 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e

$$|f(t, y) - f(t, x)| \leq \frac{1}{2}|y - x| \quad , \quad \text{para todos os } (t, x), (t, y) \in \mathbb{R}^2$$

Considere o problema de valor inicial

$$y' = -y + f(t, y) \quad , \quad y(0) = 1$$

(a) Mostre que este problema tem solução única numa vizinhança de $t = 0$.

(b) Mostre que o intervalo máximo de existência de solução é \mathbb{R} .

11. (a) Se $x(t)$ é a solução de uma equação diferencial $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$, determine uma equação satisfeita pela função $y(t) = x(-t)$.

(b) Mostre que todas as soluções da equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \text{sen}(tx) + t^3$$

são funções pares (quando prolongadas ao seu intervalo máximo de definição).

Soluções

1. Ver soluções na Secção 1 (Exercícios resolvidos).

2. $y(t) = t^6$

3. Com a solução de equilíbrio $y(x) \equiv 0$ e a solução geral $y_c(x) = \frac{(x+c)^2}{4}$, $c \in \mathbb{R}$, podemos definir uma infinidade de soluções do (PVI):

– para $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$

$$y_\alpha^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \alpha \\ \frac{(x-\alpha)^2}{4} & \text{se } x > \alpha \end{cases}$$

– para $\alpha \in \mathbb{R}_0^-$

$$y_\alpha^-(x) = \begin{cases} \frac{(x-\alpha)^2}{4} & \text{se } x < \alpha \\ 0 & \text{se } x \geq \alpha \end{cases}$$

4. (a) $I_{\text{Max}} = \mathbb{R}$ (b) $I_{\text{Max}} =]\alpha, +\infty[$ em que $\alpha \in [-e/4, -e^{-1}/4]$
(c) $I_{\text{Max}} =]-\infty, \alpha[$ em que $\alpha \in]0, e^{-1}[$

5. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1$

6. (a) $y(t) = \sqrt{1 + 12(1-t)^2}$

(b) Com a solução do (PVI) $y(t) = \sqrt{1 + 12(1-t)^2}$ e a solução geral $y(t) = \sqrt{1 - c(1-t)^2}$, $c \in \mathbb{R}$ podemos definir uma infinidade de soluções do (PVI) definidas em \mathbb{R} por

$$y_c(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + 12(1-t)^2} & \text{se } t \leq 1 \\ \sqrt{1 - c(1-t)^2} & \text{se } t > 1 \end{cases}, \quad c \in \mathbb{R}$$

7. (i) $y(t) = \text{tg} \frac{t^2 - 1}{2}$, e $I_{\text{Max}} =]-\sqrt{\pi + 1}, \sqrt{\pi + 1}[$.

8. (b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$

11. (a) $\frac{dy}{dt} = -f(-t, y(t))$