TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais
1º Semestre 2020/2021

Curso: MEQ, MEAmbi

Ficha de Problemas nº 5
Séries de Potências. Séries de Taylor. Séries de Laurent.

1 Exercícios Resolvidos

1. Calcule as regiões de convergência das seguintes séries de potências:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^n}{n^4+1}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(z+1-\mathrm{i})^n$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(z+1)^n$

Resolução:

(a) Note-se que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^n}{n^4+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{n^4+1}(z-2\mathrm{i})^n$$

pelo que se trata de uma série de potências da forma $\sum a_n(z-2i)^n$. Tem-se então (caso o limite exista):

$$R = \lim_n \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_n \frac{\frac{(1/\sqrt{2})^n}{n^4+1}}{\frac{(1/\sqrt{2})2^{n+1}}{(n+1)^4+1}} = \sqrt{2}\lim_n \frac{(n+1)^4+1}{n^4+1} = \sqrt{2}.$$

Assim, a série é convergente na região:

$$\left\{z \in \mathbb{C} : |z-2\mathrm{i}| < \sqrt{2}\right\}.$$

(b) Trata-se de uma série de potências da forma $\sum a_n(z+1-\mathrm{i})^n$. Tem-se então:

$$1/R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

pelo que $R = +\infty$. Consequentemente, a série é convergente em $\mathbb{C}$.

(c) Trata-se de uma série de potências da forma $\sum a_n(z+1)^n$. Tem-se então, caso o limite exista

$$R = \lim_n \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_n \frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} = \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$$

e a série é convergente na região

$$\{z \in \mathbb{C} \, : \, |z+1| < e\}$$

2. Determine os raios de convergência das seguinte séries complexas (a é um número real):

$$\mathbf{a)} \sum_0^\infty a^n z^n \qquad \mathbf{b)} \sum_0^\infty a^{n^2} z^n \qquad \mathbf{c)} \sum_0^\infty z^{n!} \qquad \mathbf{d)} \sum_0^\infty n! z^n$$

Resolução:

Dado que em todas as alíneas se tem uma série de potências centrada em 0 a região de convergência será da forma $|z| < R$ com $R \in [0, +\infty]$. Sendo assim basta calcular, em cada caso, o raio de convergência da série.

a) $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a^n|} = |a|$

b) $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a^{n^2}|} = \lim\limits_n |a|^n$. Tem-se então que

$$R = \begin{cases} \infty & \text{se} \quad |a| < 1 \\ 1 & \text{se} \quad |a| = 1 \\ 0 & \text{se} \quad |a| > 1 \end{cases}$$

c) Desenvolvendo a série

$$\sum_0^\infty z^{n!} = 1 + z + z^2 + z^6 + z^{24} + \cdots$$

pelo que se observa que a série é da forma $\sum\limits_0^\infty a_m z^m$ em que

$$a_m = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n! \text{ para algum } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Conclui-se que

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{m\to\infty} a_m} = \frac{1}{\max\{0,1\}} = 1$$

d) $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{n!}{(n+1)!}\right| = 0$

3. Para cada uma das seguintes alíneas determine o raio de convergência da séries de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, sendo

(a) $a_n = \dfrac{1}{n+1}$, $z_0 = \mathrm{i}$ (b) $a_n = n^n$, $z_0 = 2$

(c) $a_n = (2+(-1)^n)^{-n}$, $z_0 = \pi$ (d) $a_n = \dfrac{n}{n!}$, $z_0 = 1+2\mathrm{i}$

Resolução:

(a) A região de convergência é $\{|z-\mathrm{i}|<R\}$ sendo

$$R = \lim_n \left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}}\right| = 1$$

(b) A região de convergência é $\{|z-2|<R\}$ sendo

$$R = \frac{1}{\lim\limits_n \sqrt[n]{|n^n|}} = \lim_n \frac{1}{n} = 0$$

ou seja, a série converge apenas em $z=2$.

(c) A região de convergência é $\big\{|z-\pi|<R\big\}$ e tem se que

$$\lim_n \sqrt[n]{\left|(2+(-1)^n)^{-n}\right|} = \begin{cases} 1 & \text{para (a subsucessão dos)} \quad n \text{ impar} \\ \frac{1}{3} & \text{para (a subsucessão dos)} \quad n \text{ par} \end{cases}$$

Então

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_n \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\max\{1,\frac{1}{3}\}} = 1$$

(c) A região de convergência é $\big\{|z-1-2\mathrm{i}|<R\big\}$ e tem-se que

$$R = \lim_n \left|\frac{\frac{n}{n!}}{\frac{n+1}{(n+1)!}}\right| = \lim_n \frac{n(n+1)!}{(n+1)n!} = \infty$$

ou seja, a série converge em todo o $\mathbb{C}$.

4. Suponha que o raio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é $0<R<\infty$ e que existe $\lim|\frac{a_n}{a_{n+1}}|$. Determine o raio de convergência das

séries de potências $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, sendo

$(\mathbf{a})\ b_n = n^k a_n \qquad (\mathbf{b})\ b_n = n^{-n} a_n \qquad (\mathbf{c})\ b_n = (a_n)^k \qquad (\mathbf{d})\ b_n = (z_0 - 1)^n a_n$

(com $k \in \mathbb{N}$ e $|z_0| \neq 1$).

Resolução:

Seja Θ o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

(a)

$$\Theta = \lim_n \left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| = \lim_n \left|\frac{n^k a_n}{(n+1)^k a_{n+1}}\right| = \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \lim_n \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$$

(b) Como $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{R}$, então:

$$\Theta = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|b_n|}} = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{n^{-n}|a_n|}} = \lim_n n \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}} = R \lim_n n = \infty$$

(c)

$$\Theta = \lim_n \left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| = \lim_n \left|\frac{(a_n)^k}{(a_{n+1})^k}\right| = \lim_n \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|^k = R^k$$

(d)

$$\Theta = \lim_n \left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| = \lim_n \left|\frac{(z_0-1)^n a_n}{(z_0-1)^{n+1} a_{n+1}}\right| = \frac{R}{|z_0 - 1|}$$

5. Obtenha a série de Maclaurin de $f(z)$ para as seguintes funções, indicando os respectivos domínios de convergência:

$(\mathbf{a})\ f(z) = \dfrac{1}{z-1} + e^{2z} \qquad (\mathbf{b})\ f(z) = \cosh z$

$(\mathbf{c})\ f(z) = \dfrac{z}{z^2-4} \qquad (\mathbf{d})\ f(z) = (z^2+1)\cos z^2$

$(\mathbf{e})\ f(z) = e^z + \dfrac{1}{(z-1)^2} \qquad (\mathbf{f})\ f(z) = \dfrac{1}{(1-z)(1+z)^2}$

Resolução:

(a) Para obter a série de Maclaurin de f vamos usar a série geométrica e a série da função exponencial. Assim

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + e^{2z} = -\frac{1}{1-z} + e^{2z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-1 + \frac{2^n}{n!} \Big) z^n$$

O domínio de convergência da série será a intersecção do domínio de convergência da série geormétrica de razão z, $|z| < 1$, com o domínio da série da exponencial, que é $\mathbb{C}$. Conclui-se que a região de convergência da série de f é $|z| < 1$.

(b) Vamos determinar a série usando a definição de coseno hiperbólico e a série da exponencial. Assim

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} \Big) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n!} z^n$$

Dado que

$$1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{para} \quad n \ \text{par} \\ 0 & \text{para} \quad n \ \text{impar} \end{cases}$$

a série pode ser escrita na forma

$$\cosh z = \sum_{n \text{ par}}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

e atendendo a que a função exponencial é inteira, a série converge em $\mathbb{C}$.

(c) Para obter o produto das séries de Maclaurin de f vamos calcular o produto de uma série geométrica por z (a última função já está escrita em potências de z). Assim

$$f(z) = -z \frac{1}{4 - z^2} = -\frac{z}{4} \Big(\frac{1}{1 - \frac{z^2}{4}} \Big) = -\frac{z}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{z^2}{4} \Big)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{4^{2n+1}}$$

O domínio de convergência da série é o domínio de convergência da série geométrica de razão $z^2/4$, ou seja, $\left| \frac{z^2}{4} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |z| < 2$.

(d) Vamos multiplicar a série de Maclaurin da função coseno pelo polinómio $z^2 + 1$ (que já está escrito em potências de z). Assim

$$\begin{aligned} f(z) &= (z^2+1)\cos z^2 = (z^2+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z^2)^{2n}}{(2n)!} \\ &= z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n+2}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

O domínio de convergência da série é $\mathbb{C}$ pois tanto a função coseno como o polinómio são funções inteiras.

(e) Vamos usar a série geométrica e a série de Maclaurin da função exponencial. A série da função $\frac{1}{(1-z)^2}$ vai ser obtida tendo em conta que $\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)'$ e que uma série de potências pode ser derivada termo a termo na sua região de convergência. Assim

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$$

sendo o domínio de convergência $|z| < 1$ (igual ao da série que foi derivada). Então

$$f(z) = e^z + \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$$

e o seu domínio de domínio de convergência é $|z| < 1$, pois a função exponencial é inteira.

(f) Dado que o denominador da função f não pode ser escrito na forma $1 - cz^3$, não podemos contar com a ajuda da série geométrica de razão cz^3. Por isso, começamos por separar a função em fracções simples, calculando as constantes A, B e C tais que

$$\frac{1}{(1-z)(1+z^2)} = \frac{A}{1-z} + \frac{Bz + C}{1+z^2}$$

Isto é equivalente a (no domínio da f)

$$\frac{1}{(1-z)(1+z^2)} = \frac{A(1+z^2) + (Bz+C)(1-z)}{(1-z)(1+z^2)^2} = \frac{A + Az^2 + Bz - Bz^2 + C - Cz}{(1-z)(1+z^2)}$$

tendo-se pois que

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ B - C = 0 \\ A - B = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B = \frac{1}{2} \\ C = \frac{1}{2} \\ A = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1/2}{1-z} + \frac{z/2 + 1/2}{1+z^2} \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z^2} + \frac{z}{1+z^2}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} + \sum_{0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1}\Big) \end{aligned}$$

válida em $|z| < 1$. Note que a primeira série é válida nesta região, enquanto as outras duas são válidas em $|-z^2| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$.

6. Determine os desenvolvimentos de Taylor das seguintes funções em torno dos seguintes pontos:

(a) $\operatorname{sen} z$, em torno de $z = \pi$.

(b) e^{2z} , em torno de $z = i\pi$.

(c) $z^2 e^z$, em torno de $z = 1$.

Resolução:

(a) Para todo o $z \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(z + \pi - \pi) = -\operatorname{sen}(z - \pi) = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(b) Para todo o $z \in \mathbb{C}$

$$e^{2z} = e^{2(z-i\pi)}e^{2i\pi} = e^{2(z-i\pi)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}(z - i\pi)^n$$

(c) Para todo o $z \in \mathbb{C}$, e escrevendo também z^2 em potências de $z - 1$:

$$\begin{aligned} z^2 e^z &= (z-1+1)^2 e^{z-1+1} = \Big((z-1)^2 + 2(z-1) + 1\Big)\, e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} \\ &= e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{n+2}}{n!} + 2e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{n+1}}{n!} + e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n \end{aligned}$$

em que

$$a_n = \begin{cases} e & \text{se } n = 0 \\ 3e & \text{se } n = 1 \\ \dfrac{e}{(n-2)!} + \dfrac{2e}{(n-1)!} + \dfrac{e}{n!} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

7. Determine o raio de convergência das séries de Taylor em torno de $z_0 = 0$ das seguintes funções:

$$(\mathbf{a}) \quad f(z) = \frac{\cosh \pi - \cos(\pi z)}{e^{\pi z} + 1} \qquad (\mathbf{b}) \quad g(z) = \frac{4z^2 - \pi^2}{(z-1)^6}$$

Resolução:

(a) A função f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{z : e^{\pi z} + 1 = 0\}$, ou seja em $\mathbb{C} \setminus \{(2k+1)\mathrm{i}\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$. A série de Maclaurin de f é válida no maior disco centrado em 0 onde a função é analítica, isto é no maior disco centrado em 0 que não contém nenhum dos pontos $(2k+1)\mathrm{i}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Assim a série de Maclaurin de f será convergente em $|z| < 1$.

(b) A função f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. A série de Maclaurin de f é válida no maior disco centrado em 0 onde a função é analítica ou seja o maior disco centrado em 0 que não contém 1. Assim a série de Maclaurin de f será convergente em $|z| < 1$.

8. Obtenha a função soma das seguintes séries em $|z| < 1$

$$(\mathbf{a})\ \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (\mathbf{b})\ \sum_{n=1}^{\infty} nz^n \qquad (\mathbf{c})\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad (\mathbf{d})\ \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^n$$

Resolução:

(a) Trata-se da série geométrica de razão z, com $|z| < 1$ e, como tal, a sua soma é

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

(b) Usando o facto de que uma série de potências pode ser derivada termo a termo, tem-se que

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = z\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = z\sum_{n=1}^{\infty} (z^n)' = z\Big(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\Big)' = z\Big(\frac{1}{1-z}\Big)' = \frac{z}{(1-z)^2}$$

(c) Usando o facto de que uma série de potências pode ser primitivada termo a termo, tem-se que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int z^n dz\Big) = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) dz = \int \frac{1}{1-z}\, dz = -\log(1-z) + C$$

onde se usa um ramo de $\log(1-z)$ analítico em $|z| < 1$: por exemplo o ramo do logaritmo complexo tal que $\arg(1-z) \in]\pi, \pi]$. Para determinar a constante vamos usar a igualdade em $z = 0$. Note-se que a série converge em 0 visto este ponto pertencer ao domínio de convergência e o valor principal de $\log(1-z)$ ser uma função analítica em 0. Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\Big|_0 = -\log(1-z) + C\Big|_0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -\log 1 + C \quad \Leftrightarrow \quad C = 0$$

(d) Usando o facto de que uma série de potências pode ser derivada termo a termo, tem-se que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^n = z\sum_{n=1}^{\infty} (z^{n+1})'' = z\Big(\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}\Big)'' = z\Big(z\sum_{n=0}^{\infty} z^n\Big)'' = z\Big(\frac{z}{1-z}\Big)''$$

pelo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^n = \frac{2z}{(1-z)^3}$$

9. Considere a seguinte série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n \qquad \text{onde} \qquad a_n = \begin{cases} 5^n & \text{se } \; n \text{ par} \\ (-2)^n & \text{se } \; n \text{ impar} \end{cases} .$$

Sabendo que esta é a série de Taylor em torno de $z_0 = 0$ de uma função f, analítica em todo o seu domínio, calcule $f(1)$.

Resolução:

Vê-se fácilmente que:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 5 & \text{se } \; n \text{ par} \\ 2 & \text{se } \; n \text{ impar} \end{cases}$$

Logo:

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = 5.$$

Tem-se então que a série converge na região

$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < \frac{1}{5}\}$$

Assim sendo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ diverge em $z = 1$, pelo que é impossível calcular o valor de $f(1)$ por substituição de $z = 1$ naquela série. Porém, na região $|z| < \frac{1}{5}$, temos:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\ &= \sum_{n \text{ par}} 5^n z^n + \sum_{n\, impar} (-2)^n z^n \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} 5^{2m} z^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} (-2)^{2m+1} z^{2m+1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \Big((5z)^2\Big)^m - 2z \sum_{m=0}^{\infty} \Big((2z)^2\Big)^m \\ &= \frac{1}{1-25z^2} - \frac{2z}{1-4z^2} \end{aligned}$$

Como f é analítica em todo o seu domínio, concluimos que:

$$f(z) = \frac{1}{1-25z^2} - \frac{2z}{1-4z^2} \,, \qquad \text{para qualquer } z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\pm\frac{1}{5}, \pm\frac{1}{2}\right\} \,,$$

o que implica que $f(1)=\frac{5}{8}$

10. Determine a ordem do zero $z=0$ das seguintes funções:

$$\begin{aligned}&(\mathbf{a})\quad f(z)=z^3(e^{\pi z}-1)^4\operatorname{sen} z^2\\&(\mathbf{b})\quad g(z)=(z^5+z^2)(1-\cos z^3)^2(1-e^{z^4})\end{aligned}$$

Resolução:

(a) Para classificar o zero $z=0$ de f vamos desenvolver em série de Maclaurin os factores da função. Tem-se que

$$e^{\pi z}-1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pi z)^n}{n!}-1=\Big(1+\pi z+\frac{\pi^2z^2}{2}+\frac{\pi^3z^3}{3!}+\cdots\Big)-1=z\Big(\pi+\frac{\pi^2z}{2}+\frac{\pi^3z^2}{3!}+\cdots\Big)$$

e

$$\operatorname{sen} z^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z^2)^{2n+1}=z^2-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{10}}{3!}+\cdots=z^2\Big(1-\frac{z^4}{3!}+\frac{z^8}{3!}+\cdots\Big)$$

Tem-se então que

$$\begin{aligned}f(z)&=z^3\Big[z\Big(\pi+\frac{\pi^2z}{2}+\frac{\pi^3z^3}{3!}+\cdots\Big]^4\Big[z^2\Big(1-\frac{z^4}{3!}+\frac{z^8}{3!}+\cdots\Big)\Big]\\&=z^9\Big(\pi+\frac{\pi^2z}{2}+\frac{\pi^3z^2}{3!}+\cdots\Big)^4\Big(1-\frac{z^4}{3!}+\frac{z^8}{3!}+\cdots\Big)\end{aligned}$$

Definindo

$$F(z)=\Big(\pi+\frac{\pi^2z}{2}+\frac{\pi^3z^2}{3!}+\cdots\Big)^4\Big(1-\frac{z^4}{3!}+\frac{z^8}{3!}+\cdots\Big)$$

verifica-se que:

- F é uma função analítica numa vizinhança de 0: estas séries de potências de z são funções analíticas em $\mathbb{C}$; além disso, o produtos de funções analíticas é uma função analítica;
- $F(0)=\pi^4\neq 0$.

Conclui-se que 0 é um zero de ordem 9 de f.

(b) Para classificar o zero $z=0$ de g vamos desenvolver em série de Maclaurin os factores da função. Tem-se que

$$1-\cos z^3=1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z^3)^{2n}=1-\Big(1-\frac{z^6}{2!}+\frac{z^9}{4!}+\cdots\Big)=z^6\Big(-\frac{1}{2!}+\frac{z^2}{4!}+\cdots\Big)$$

e

$$1-e^{z^4}=1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z^4)^n}{n!}=1-\Big(1+z^4+\frac{z^8}{2!}+\frac{z^{12}}{3!}+\cdots\Big)=z^4\Big(-1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^8}{3!}+\cdots\Big)$$

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2(z^3+1)\Big[z^6\Big(-\frac{1}{2!}+\frac{z^2}{4!}+\cdots\Big)\Big]^2\Big[z^4\Big(-1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^8}{3!}+\cdots\Big)\Big] \\ &= z^{18}(z^3+1)\Big(-\frac{1}{2!}+\frac{z^2}{4!}+\cdots\Big)^2\Big(-1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^8}{3!}+\cdots\Big) \end{aligned}$$

Definindo

$$G(z)=(z^3+1)\Big(-\frac{1}{2!}+\frac{z^2}{4!}+\cdots\Big)^2\Big(-1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^8}{3!}+\cdots\Big)$$

verifica-se, tal como na alínea anterior, que:

- G é uma função analítica numa vizinhança de 0;
- $G(0)=\frac{1}{4}\neq 0$.

Conclui-se que $z=0$ é um zero de ordem 18 de g.

11. Mostre que uma série de potências com raio de convergência não nulo é a série de Taylor da sua função soma.

Resolução:

Consideremos a série de potências

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots$$

Em primeiro lugar, $f(z_0)=a_0$. Para z no interior do disco de convergência da série, tem-se também que

$$f'(z_0)=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\Big)'\Big|_{z_0}=\Big(a_1+2a_2(z-z_0)+3a_3(z-z_0)^2+\cdots\Big)'\Big|_{z_0}=a_1.$$

Da mesma forma

$$f''(z_0)=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\Big)''\Big|_{z_0}=\Big(2a_2+6a_3(z-z_0)+12a_4(z-z_0)^3+\cdots\Big)'\Big|_{z_0}=2a_2=2!a_2$$

Continuando a derivação da série recursivamente, pode-se provar por indução que

$$f^{(n)}(z_0)=n!a_n.$$

Resulta pois que

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Note que o resultado é, precisamente, a série de Taylor de f em torno de z_0; a resolução deste problema é a maneira mais simples de deduzir a fórmula dos coeficientes de uma série de Taylor.

12. Para cada função e região indicadas, determine as respectivas séries de Laurent:

(a) $\dfrac{1}{z-1}$, $|z|>1$ (b) $z^5\left(e^{\frac{1}{z}}+z\right)$, $|z|>0$

(c) $\dfrac{z-i}{(z-2i)^2}$, $|z-i|>1$ (d) $\left(3z^2-1\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi z^3+z}{z^3}\right)$, $|z|>0$

Resolução:

(a) Dado que $|z|>1$ (o que implica que $\left|\frac{1}{z}\right|<1$), é válido o desenvolvimento

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}$$

(b) Para $z\neq 0$

$$z^5\left(e^{\frac{1}{z}}+z\right)=z^5\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}+z\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n-5}}+z^6$$

(c) Para $|z-i|>1$ (o que implica $\dfrac{1}{|z-i|}<1$), tem-se que

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-2i)^2} &= -\frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{z-2i}\Big)=-\frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{z-i-i}\Big)\\ &= -\frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1-\frac{i}{z-i}}\Big)=-\frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{i}{z-i}\Big)^n\Big)\\ &= -\frac{d}{dz}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{(z-i)^{n+1}}\Big)\end{aligned}$$

Derivando a série termo a termo, obtém-se:

$$\frac{1}{(z-2i)^2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}\Big(\frac{i^n}{(z-i)^{n+1}}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n(n+1)}{(z-i)^{n+2}}.$$

Finalmente

$$\frac{z-i}{(z-2i)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n(n+1)}{(z-i)^{n+1}}\quad\text{para}\quad |z-i|>1$$

(d) Para $|z| > 0$

$$\begin{aligned}
\left(3z^2-1\right)\operatorname{sen}\frac{\pi z^3+z}{z^3} &= (3z^2-1)\operatorname{sen}\left(\pi+\frac{1}{z^2}\right)\\
&= (1-3z^2)\operatorname{sen}\frac{1}{z^2}\\
&= (1-3z^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^{2n+1}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{4n+2}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^{n+1}}{(2n+1)!z^{4n}}
\end{aligned}$$

13. Obtenha os desenolvimentos em série de Laurent da função $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ válidos em $0 < |z-1| < 2$ e em $0 < |z-3| < 2$.

Resolução:

As séries pedidas — centradas nos pontos 1 e 3 — são ambas séries de Laurent pois f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{1,3\}$.

Para a coroa circular $0 < |z-1| < 2$, pretende-se desenvolver a função em potências de $z-1$. Ora

$$f(z) = (z-1)^{-2}\cdot\frac{1}{z-3}$$

tem a forma de um produto de $(z-1)^{-2}$ (que é já uma série de Laurent convergente em $|z-1| > 0$) por $\frac{1}{z-3}$ (que é analítica em 1 e, como tal, admite desenvolvimento em série de Taylor em torno de 1 que converge para $\frac{1}{z-3}$ em $|z-1| < 2$). Assim

$$f(z) = (z-1)^{-2}\cdot\frac{1}{z-3} = (z-1)^{-2}\frac{1}{(z-1)+1-3} = -\frac{(z-1)^{-2}}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}$$

Usando a série geométrica de razão $\frac{z-1}{2}$, obtém-se

$$f(z) = -\frac{(z-1)^{-2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{n-2}}{2^{n+1}}$$

que converge na interseção das regiões $|z-1| > 0$ e $|z-1| < 2$, isto é, em $0 < |z-1| < 2$, como era requerido.

Para o desenvolvimento na coroa circular $0 < |z-3| < 2$, usa-se o mesmo método. A função é o produto de $\frac{1}{z-3}$ (uma potência de expoente negativo de $z-3$, definida em $|z-3| > 0$) por

$\frac{1}{(z-1)^2}$ (que é analítica em 3 e, assim, admite desenvolvimento em série de Taylor em torno de 3 que converge em $|z-3|<2$). Assim

$$\begin{aligned}
f(z) &= (z-3)^{-1}\frac{1}{(z-1)^2} \\
&= (z-3)^{-1}\frac{1}{\big(2+(z-3)\big)^2} \\
&= \frac{(z-3)^{-1}}{4}\Big(\frac{1}{1+\frac{z-3}{2}}\Big)^2 \\
&= -\frac{(z-3)^{-1}}{4}\Big(\frac{1}{1+\frac{z-3}{2}}\Big)' \\
&= -\frac{(z-3)^{-1}}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{z-3}{2}\Big)^n\right)'
\end{aligned}$$

Derivando esta série termo a termo na sua região de convergência, tem-se que:

$$f(z) = -\frac{(z-3)^{-1}}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2}\Big(\frac{z-3}{2}\Big)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n(z-3)^{n-2}}{2^{n+2}},$$

que converge para $z\neq 3$ e $|z-3|<2$, isto é, em $0<|z-3|<2$ como era pedido.

14. Determine a série de Laurent de $\frac{1}{(z^2-1)^2}$ em cada uma das regiões

(a) $0<|z-1|<2$.

(b) $2<|z-1|$.

e use o resultado obtido para calcular os seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1}\frac{1}{(z^2-1)^2}\,dz$.

(b) $\displaystyle\oint_{|z-1|=3}\frac{1}{(z^2-1)^2}\,dz$

Resolução:

(a) Para qualquer $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$, tem-se que

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{d}{dz}\Big(\frac{-1}{z+1}\Big)$$

Para $0 < |z-1| < 2$, verifica-se que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2-1)^2} &= \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{d}{dz}\Big(\frac{-1}{2+z-1}\Big) = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{d}{dz}\Big(\frac{-1}{2(1+\frac{z-1}{2})}\Big) \\ &= \frac{-1}{2(z-1)^2} \cdot \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{z-1}{2}\Big)^n \end{aligned}$$

Derivando esta série termo a termo, obtém-se:

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{-1}{2(z-1)^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\frac{(z-1)^{n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^{n-3}$$

Por outro lado, se $|z-1| > 2$ (o que implica $\dfrac{2}{|z-1|} < 1$), tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2-1)^2} &= \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{d}{dz}\Big(\frac{-1}{z-1+2cv}\Big) = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{d}{dz}\Big(\frac{-1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z-1}}\Big) \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{d}{dz}\Big(\frac{-1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-1)^n}\Big) = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{(z-1)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n(-n-1)}{(z-1)^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n(n+1)}{(z-1)^{n+4}} \end{aligned}$$

(b) Pelo Teorema de Laurent, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

é o coeficiente de $(z-z_0)^n$ da série de Laurent de f convergente na região $r < |z-z_0| < R$, para qualquer curva de Jordan C, seccionalmente regular, percorrida em sentido directo e contida na região de convergência. Sendo assim, e atendendo a que a circunferência $|z-1| = 1$ é uma curva de Jordan e está contida na região $0 < |z-1| < 2$, o integral pedido tem o valor

$$\oint_{|z-1|=1}\frac{1}{(z^2-1)^2}dz = \oint_{|z-1|=1}\frac{f(z)}{(z-1)^0}dz = 2\pi i\, a_{-1},$$

em que a_{-1} é o coeficiente de $(z-1)^{-1}$ da **primeira** série obtida em (a). Assim,

$$\oint_{|z-1|=1}\frac{1}{(z^2-1)^2}dz = 2\pi i\Big(-\frac{1}{4}\Big) = -\frac{\pi i}{2}$$

Analogamente, e dado que a circunferência $|z-1|=3$ é uma curva de Jordan e está contida na região $|z-1|>2$, o integral pedido tem o valor

$$\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z^2-1)^2} dz = 2\pi i \, b_{-1}$$

em que b_{-1} é o coeficiente de $\frac{1}{z-1}$ da **segunda** série obtida em (a). Mas como esse termo da série é nulo, resulta que

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2-1)^2} dz = 0$$

15. Obtenha todos os desenvolvimentos possíveis em potências de z para a função

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$$

indicando os respectivos domínios de convergência.

Resolução:

A função f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Como f não é analítica em 0 (que é o centro do desenvolvimento em série) ela só admite desenvolvimentos em séries de Laurent em torno desse ponto. Consideremos as maiores coroas circulares centradas em 0 onde f é analítica, que são $0<|z|<1$ e $1<|z|<\infty$.

- Em $0<|z|<1$, tem-se que f é o produto de $\frac{1}{z^2} = z^{-2}$ (definida em $|z|>0$) por $\frac{1}{z-1}$ (cujo desenvolvimento em série de Maclaurin é a usual série geométrica convergente para $|z|<1$). Assim

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{-1}{1-z} = \frac{-1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-2}$$

- Em $1<|z|<\infty$ tem-se que f é o produto de $\frac{1}{z^2} = z^{-2}$ (definida em $|z|>0$) por $\frac{1}{z-1}$ em $|z|>1$. Como tal, $f(z)$ pode ser desenvolvida em série com a ajuda da série geométrica de razão $\frac{1}{z}$ (que é válida em $|z|>1$):

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+3}$$

16. Considere a função complexa f definida no seu domínio por

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^4}.$$

(a) Obtenha o desenvolvimento em série de Laurent de f, válido em $0 < |z| < 1$.

(b) Recorrendo ao teorema de Laurent, calcule a parte principal da série de Laurent de f válida em $0 < |z-1| < 1$.

Resolução:

a) A função f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Como f não é analítica no centro da série, 0, a série válida na região indicada será de Laurent. Como podemos escrever a função na forma

$$f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)},$$

tem-se que f é o produto de $\frac{1}{z^3}$ (que já é uma potência de z) por $\frac{1}{1-z}$ (cuja série de Maclaurin é a bem conhecida série geométrica válida em $|z| < 1$). Assim

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-3}$$

b) A parte principal da série de Laurent de f centrada em 1 é

$$\sum_{n=-\infty}^{.1} a_n (z-1)^n = \frac{a_{-1}}{z-1} + \frac{a_{-2}}{(z-1)^2} + \frac{a_{-2}}{(z-1)^3} + \cdots$$

Pelo teorema de Laurent

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-1)^{n+1}} dz$$

para $n \leq -1$ e para γ qualquer curva de Jordan orientada positivamente, contida na coroa circular $0 < |z-1| < 1$ e tal que $1 \in \operatorname{int} \gamma$. Tem-se assim que

- Para $n = -1$

  $$a_{-1} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\gamma f(z) dz = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{-\frac{1}{z^3}}{z-1} dz$$

  Atendendo a que a função $-\frac{1}{z^3}$ é analitica em $|z-1| < 1$ (e, como tal, em $\overline{\operatorname{int} \gamma}$) podemos aplicar a fórmula integral de Cauchy para concluir que

  $$a_{-1} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \Big(2\pi\mathrm{i} \frac{-1}{z^3} \Big|_{z=1} \Big) = -1$$

- Para $n \leq -2$,

  $$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-1)^{n+1}} dz = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\gamma (z-1)^{-n-2} \frac{1}{z^3} dz$$

  Atendendo a que $-n-2 > 0$, e que 0 pertence à região exterior à curva γ, resulta que a função integranda é analítica num aberto simplesmente conexo contido na região de convergência da série e contendo a curva. Pelo teorema de Cauchy,

  $$a_n = 0\ , \quad \forall n \leq -2.$$

Concluimos que a parte principal da série de Laurent de f convergente em $0 < |z-1| < 1$ é

$$\frac{-1}{z-1}$$

17. Determine todas as funções analíticas f definidas no disco unitário aberto tais que

   (a) para todo $n \in \mathbb{N}$
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n} \tag{1}$$

   (b) para todo $n \in \mathbb{N}$
$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq e^{-n} \tag{2}$$

   Existirá mais do que uma função analítica em $0 < |z| < 1$ tal que (2) se verifica? Comente a sua resposta.

   Resolução:

(a) Vamos provar que tal função não existe por redução ao absurdo. Se existe uma tal função, ela não pode ser identicamente nula dado que os valores de $f(1/n)$ são distintos e não nulos. Tem-se também, por continuidade, que

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f(1/n) = \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0\,.$$

Assim sendo, 0 é um zero de ordem $p > 0$ de f, para um certo $p \in \mathbb{N}$. Isto significa que existe uma função F analítica no disco unitário aberto tal que

$$f(z) = z^p F(z) \quad \text{e} \quad F(0) \neq 0.$$

Porém, por (1) tem-se que $F(1/n) = n^{-p}e^{-n}$. Isto implica que $F(0) = \lim_{n\to\infty} n^{-p}e^{-n} = 0$, o que é uma contradição.

(b) Verifica-se que a $f(z) \equiv 0$ é uma das respostas. Vamos mostrar que é a única por redução ao absurdo. Se existe uma função não nula, analítica no disco aberto unitário e verificando (2), temos necessariamente que

$$|f(0)| = \lim_{n\to\infty} |f(1/n)| = 0$$

e, assim, $f(0) = 0$. Procedendo de forma análoga à alínea anterior, existe um $p \in \mathbb{N}$ e uma função F analítica no disco unitário aberto tal que $F(0) \neq 0$ e

$$f(z) = z^p F(z).$$

Mas, pela condição (2):

$$|f(1/n)| = \frac{|F(1/n)|}{n^p} \le e^{-n}.$$

Isto implica que

$$|F(1/n)| \le n^p e^{-n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde mais uma vez se deduz que $F(0) = 0$, ou seja, uma contradição.

Note que $f(z) = e^{-1/z}$ é um exemplo simples de uma função analítica em $0 < |z| < 1$ que verifica (1) (e consequentemente (2)) mas que não é identicamente nula. Portanto, se deixarmos cair a hipótese de que f é analítica em 0, os resultados acima deixam de ser válidos. Isto resulta de se ter usado a ordem do zero $z = 0$ de f para concluir; ora, esta ordem só se pode definir quando f é analítica em 0.

2 Exercícios Propostos

1. Determine, ou mostre que não existem, os limites das sucessões:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2\mathrm{i}}{7+3n\mathrm{i}}$ (c) $\lim_{n\to\infty} (1+\mathrm{i})^{-n}$ (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+\mathrm{i}}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+3n}{5n^2} + \mathrm{i}\frac{-6n+n^2}{5n^2}\right)$ (f) $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n\mathrm{i}} - e^{-n\mathrm{i}}}{n}$ (g) $\lim_{n\to\infty} e^{\mathrm{i}n}$

2. Calcule a soma das seguintes séries.

$$\text{a)} \quad \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2+\mathrm{i})^{-n} \qquad \text{c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (3\mathrm{i})^{-5n+1}$$

3. Determine o raio de convergência das seguintes séries de potências

(s) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n^3}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{5n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\mathrm{i}n} z^n$ (d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{(\mathrm{i}n)^n}$ (e) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

4. Determine para que valores de z as seguintes séries convergem absolutamente

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1+\frac{1}{z}\right)^n$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(z^n + z^{-n})$

5. Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tem raio de convergência R, determine os raios de convergência das séries:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^5 z^n \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n+3}$$

6. A função ζ de Riemann é definida pela fórmula:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

Mostre que a série que define a função ζ é absolutamente convergente para $\mathrm{Re}\, z > 1$.

7. Determine as séries de Maclaurin (e respectivos domínios de validade) das seguintes funções:

(a) $\dfrac{1}{2z+5}$ (b) $\dfrac{1}{z^4+1}$ (c) $\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$ (d) $\dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$

(e) e^{-z^2} (f) $\dfrac{z^2}{(1+z)^2}$ (g) $\operatorname{sen}(z^2/3)$ (h) $(1+z)e^{-z}$

(i) $\dfrac{5z-4}{z+2}$ (j) $\dfrac{1}{z^2-2z-3}$ (k) $\dfrac{1}{(1-z^3)^2}$

8. Determine a série de Taylor na vizinhança do ponto z_0, indicando o respectivo domínio de validade:

(a) $\frac{1}{1-z}$, $z_0 = 3$ (b) $\frac{1}{z(z+2)}$, $z_0 = \mathrm{i}$ (c) $\dfrac{1}{z^2-5z+6}$, $z_0 = 1$

(d) $z\,\cos(z+1)$, $z_0 = -1$ (e) $e^{5z} + \frac{3}{3+5z}$, $z_0 = 2$ (f) $\operatorname{sen} z$, $z_0 = \pi$

(g) $\log z$ (valor principal), $z_0 = i - 1$

9. Considere a função

$$f(z) = \frac{e^z}{\operatorname{sen}^2 z}$$

Sem calcular os respectivos coeficientes, indique justificadamente qual o raio de convergência do desenvolvimento de f em série de potências de $z-2$.

10. Considere as funções $f(z) = \frac{1}{1-2z}$ definida em $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ e $g(z) = e^{-(z-\mathrm{i})}$ definida em $\mathbb{C}$.

(a) Determine o desenvolvimento de $f+g$ em série de Taylor centrada em i e determine o seu raio de convergência.

(b) Aproveite os cálculos da alínea anterior para determinar $f^{(7)}(\mathrm{i})$.

11. Mostre que as funções $f(z) = (\cos z - 1)^3 \operatorname{sen} z$ e $g(z) = (e^z - 1 - z)^3 \operatorname{sen}^2 z$ possuem zeros de ordem 7 e 8, respectivamente, no ponto $z_0 = 0$.

12. Determine os zeros e as respectivas ordens (se definidas) das seguintes funções:

(a) $z^2 \operatorname{sen} z$ (b) $(\cos z - 1)\log(1+z)$ (c) $(z^2-4)^2(e^z-1)$.

Na alínea (b) usou-se a função valor principal de $\log z$.

13. Determine a série de Laurent da função $f(z)$ válida num disco centrado em z_0, excepto no ponto z_0; isto é, válida em $0 < |z - z_0| < R$, para certo $R > 0$. Indique o valor de R.

(a) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2}, \quad z_0 = 0$ (b) $f(z) = z^3 e^{1/z}, \quad z_0 = 0$

(c) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}, \quad z_0 = 0$ (d) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z - 2}, \quad z_0 = 2$

14. Determine a série de Laurent da função

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

válida em

(a) $\{z \; : \; 2 < |z| < 3\}$ (b) $\{z \; : \; 3 < |z| < +\infty\}$

15. Determine a série de Laurent da função

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$$

válida em

(a) $\{z \; : \; 0 < |z - i| < 2\}$ (b) $\{z \; : \; |z - i| > 2\}$

Aproveite os anteriores desenvolvimentos em série para calcular

(c) $\oint_{|z-i|=1} f(z)\, dz$ (d) $\oint_{|z-i|=3} f(z)\, dz$

onde as curvas são percorridas uma vez em sentido directo.

16. Obtenha o desenvolvimento em série de potências da função

$$f(z) = \cos(\pi z) + \frac{1}{1+z}$$

válido para

(a) $|z - 1| < 2$;
(b) $|z - 1| > 2$.

17. Considere a função $f : \mathbb{C} \backslash \{1, 2\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \cos z + \frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

(a) Determine a série de Laurent da função f que converge no aberto $\{z : 1 < |z| < 2\}$.

(b) Calcule o integral

$$\int_{|z|=3/2} z^2 f(z)\,dz$$

em que a circunferência é percorrida uma vez no sentido directo.

18. Represente a função

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

(a) em série de Maclaurin e indique a região de convergência.

(b) em série de Laurent convergente em $\{z \ : \ |z| > 1\}$.

19. Seja $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ a série de Laurent da função $\dfrac{1}{e^z - 1}$ convergente em $z = \pi$. Determine a sua região de convergência e os coeficientes a_{-1} e a_0.

20. Determine todas as funções analíticas f definidas no disco unitário aberto, tais que $f(\frac{1}{n}) = 0$ para todo o número inteiro $n \geq 2$.

2.1 Soluções de 5.2

1. (a) 0 (b) $-\frac{\mathrm{i}}{3}$ (c) 0 (d) 1 (e) $\frac{2+\mathrm{i}}{5}$ (f) 0 (g) Não existe

2. a) $\frac{1-2\mathrm{i}}{20}$ b) $\frac{1-\mathrm{i}}{2}$ c) $\frac{3\mathrm{i}}{3^5\mathrm{i}-1}$

3. (a) 1 (b) 1 (c) 1 (d) ∞ (e) 0

4. (a) $|z+1| < 2$ (b) $\mathrm{Re}\, z > 0$ (c) $\mathrm{Re}\, z < -\frac{1}{2}$ (d) $|z| = 1$

5. a) R^5 b) $\sqrt{R}$

7. **(a)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{5^{n+1}} z^n$ em $|z| < \frac{5}{2}$ **(b)** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{4n}$ em $|z| < 1$

(c) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\mathrm{i}^n z^n$ em $|z| < 1$ **(d)** $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)(-1)^n z^n$ em $|z| < 1$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{2n}$ em $\mathbb{C}$ **(f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^{n+1}$ em $|z| < 1$

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}(2n+1)!} z^{4n+2}$ em $\mathbb{C}$ **(h)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{n+1}$ em $\mathbb{C}$

(i $\displaystyle 5\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}} z^n$ em $|z| < 2$

(j) $\displaystyle\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n$ em $|z| < 1$ **(k)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n z^{3n-3}$ em $|z| < 1$

8 **(a)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-3)^n$, $|z-3|<2$ **(b)** $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{i}^{n+1}}-\frac{1}{(2+\mathrm{i})^{n+1}}\right)(-1)^n(z-\mathrm{i})^n$, $|z-\mathrm{i}|<1$ **(c)** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-1)^n$, $|z-1|<1$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z+1)^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(z+1)^{2n}$, $z \in \mathbb{C}$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{10}}{n!}+\frac{3(-1)^n}{13^{n+1}}\right)5^n(z-2)^n$, $|z-2|<\frac{13}{5}$ **(f)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(z-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ em $\mathbb{C}$

(g) $\frac{1}{2}\log 2+\frac{3\pi i}{4}+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(i-1)^{n+1}}(z-i+1)^{n+1}$ em $|z-i+1|<1$

9. $\pi-2$

10. **(a)** $(f+g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{(1-2\mathrm{i})^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{n!}\right)(z-\mathrm{i})^n$ em $|z-\mathrm{i}|<\frac{\sqrt{5}}{2}$

(b) $f^{(7)}(\mathrm{i})=\frac{2^7\,7!}{(1-2\mathrm{i})^8}-1$

12. **(a)** $z_0=0$ é zero de ordem 3, $z_0=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ são zeros de ordem 1. **(b)** $z_0=0$ é zero de ordem 3, $z_0=2k\pi$, $k\in\mathbb{N}$ são zeros de ordem 2 e $z_0=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}^-$ são zeros sem ordem definida pois (v.p.) $\log(1+z)$ só é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R}: x\le -1\}$. **(c)** $z_0=\pm 2$ são zeros de ordem 2, $z_0=2k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$ são zeros de ordem 1.

13. **(a)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n-1}$ para $z\in A(0,0,\infty)$ **(b)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n+3}}{n!}$ para $z\in A(0,0,\infty)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}z^{2n-2}$ para $z\in A(0,0,\infty)$

(d) $\cos(2)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-2)^{2n}+\mathrm{sen}(2)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-2)^{2n-1}$ para $z\in A(2,0,\infty)$

14. **(a)** $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$ **(b)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{z^{n+1}}$

15. **(a)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{(2i)^{n+1}}(z-i)^{n-3}$ **(b)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(-1)^n(2i)^n}{(z-i)^{n+4}}$ **(c)** $\frac{\pi}{2}$ **(d)** 0

16. **(a)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\pi^{2n}}{(2n)!}(z-1)^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\pi^{2n}}{(2n)!}(z-1)^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(z-1)^{n+1}}$

17. **(a)** $f(z) = \cdots - \dfrac{1}{z^3} - \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{z}{2^2} - \left(\dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{2!}\right) z^2 - \dfrac{z^3}{2^4} - \left(\dfrac{1}{2^5} - \dfrac{1}{4!}\right) z^4 - \cdots$

(b) $-2\pi\mathrm{i}$

18. **(a)** $f(z) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ convergente em $|z| < 1$,

(b) Em $|z| > 1$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}$

19. A série converge em $0 < |z| < 2\pi$, $a_{-1} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}$ e $a_0 = -\frac{1}{4\pi\mathrm{i}}$.

20. A função nula.