TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais
1º Semestre 2020/2021
Curso: MEQ, MEAmbi

Ficha de Problemas nº 2
Funções elementares, limites, continuidade.

1 Exercícios Resolvidos

1. Determine o domínio das seguintes funções complexas de variável complexa:

$$(\mathbf{a}) f(z) = \frac{z}{z+3\mathrm{i}} \qquad (\mathbf{b}) g(z) = \frac{1}{z^2+2}$$
$$(\mathbf{c}) h(x+\mathrm{i}y) = \frac{x}{x^2+y^2} + 2xy \qquad (\mathbf{d}) j(x+\mathrm{i}y) = \log x + (x-2y)\mathrm{i}$$

Resolução:

(a) O domínio de f é $\{z \in \mathbb{C} \,:\, z+3\mathrm{i} \neq 0\}$ ou seja $D_f = \mathbb{C} \setminus \{-3\mathrm{i}\}$

(b) O domínio de g é $\{z \in \mathbb{C} \,:\, z^2+2 \neq 0\}$ ou seja $D_g = \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\sqrt{2},\, \mathrm{i}\sqrt{2}\}$

(c) O domínio de h é $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \neq 0\}$ ou seja $D_h = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

(d) O domínio de j é $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0\}$ ou seja $D_j = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\, z > 0\}$

2. Determine as funções parte real e parte imaginária das seguintes funções complexas:

$$f(z) = 2z + 6\overline{z} \quad , \quad g(z) = |z|^2 \quad , \quad h(z) = \frac{z}{\overline{z}}$$

Calcule $f(1+3\mathrm{i})$, $g(-3\mathrm{i})$ e $h(2-2\mathrm{i})$.

Resolução:

Para f, fazendo $z = x + \mathrm{i}y$ tem-se que

$$f(x + \mathrm{i}y) = 2(x + \mathrm{i}y) + 6(x - \mathrm{i}y) = 8x - 4\mathrm{i}y$$

pelo que

$$\operatorname{Re} f \equiv u(x, y) = 8x \quad , \quad \operatorname{Im} f \equiv v(x, y) = -4y$$

e $f(1 + 3\mathrm{i}) = u(1, 3) + \mathrm{i}v(1, 3) = 8 - 12\mathrm{i}$.

Para g, fazendo $z = x + \mathrm{i}y$ tem-se que

$$g(x + \mathrm{i}y) = x^2 + y^2$$

peço que

$$\operatorname{Re} g \equiv u(x, y) = x^2 + y^2 \quad , \quad \operatorname{Im} g \equiv v(x, y) = 0$$

e, $g(-3\mathrm{i}) = u(0, -3) + \mathrm{i}v(0, -3) = 9$.

Para h, fazendo $z = x + \mathrm{i}y$ tem-se que

$$h(x + \mathrm{i}y) = \frac{x + \mathrm{i}y}{x - \mathrm{i}y} = \frac{(x + \mathrm{i}y)^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i}}{x^2 + y^2}$$

peçl que

$$\operatorname{Re} h \equiv u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad , \quad \operatorname{Im} h \equiv v(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

e, $h(2 - 2\mathrm{i}) = u(2, -2) + \mathrm{i}v(2, -2) = -\mathrm{i}$.

3. Determine se os seguintes conjuntos são abertos, fechados, conexos:

$$A = \{z \, : \, |z| \leq 2\} \qquad B = \{z \, : \, \operatorname{Re}(\overline{z} + 1) \geq 4\}$$
$$C = \{z \, : \, |\operatorname{Im} z| > 1 \text{ e } |z| < 5\}$$

Resolução:

A e B são fechados e conexos, C é aberto e não conexo.

4. Estabeleça as seguintes identidades (onde $z = x + iy$):

a) $|\cos z|^2 + |\operatorname{sen} z|^2 = \cosh(2y)$ b) $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$

c) $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w$ d) $\cosh^2 z + \operatorname{senh}^2 z = \cosh(2z)$

Resolução:

(a) Notando que para qualquer complexo z se tem $|z|^2 = z\overline{z}$ e que $\overline{e^{iz}} = e^{-i\overline{z}}$, tem-se que

$$\begin{aligned}
|\cos z|^2 &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\overline{\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}} \\
&= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\frac{e^{-i\overline{z}}+e^{i\overline{z}}}{2} \\
&= \frac{e^{i(z-\bar{z})}+e^{i(z+\bar{z})}+e^{-i(z-\bar{z})}+e^{-i(z+\bar{z})}}{4}
\end{aligned}$$

e também:

$$\begin{aligned}
|\operatorname{sen} z|^2 &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\overline{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}} \\
&= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\frac{e^{-i\bar{z}}-e^{i\bar{z}}}{-2i} \\
&= \frac{e^{i(z-\bar{z})}-e^{i(z+\bar{z})}+e^{-i(z-\bar{z})}-e^{-i(z+\bar{z})}}{4}
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
|\cos z|^2 + |\operatorname{sen} z|^2 &= \frac{e^{i(z-\bar{z})}+e^{-i(z-\bar{z})}}{2} \\
&= \frac{e^{-2y}+e^{2y}}{2} \\
&= \cosh(2y).
\end{aligned}$$

(b) Utilizando a definição das funções trigonométricas complexas

$$\begin{aligned}
\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z &= \left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z-e^{-z}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{2z}+2+e^{-2z}-e^{2z}-2-e^{-2z}\right) = 1
\end{aligned}$$

(c) Utilizando a definição das funções trigonométricas complexas

$$\operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2} + \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i} = \\
&= \frac{e^{i(z+w)}+e^{i(z-w)}-e^{i(-z+w)}-e^{-i(z+w)}}{4i} + \frac{e^{i(z+w)}-e^{i(z-w)}+e^{i(-z+w)}-e^{-i(z+w)}}{4i} = \\
&= \frac{e^{i(z+w)}-e^{-i(z+w)}}{2i} = \operatorname{sen}(z+w)
\end{aligned}$$

(d) Utilizando a definição das funções trigonométricas complexas

$$\begin{aligned}\cosh^2 z + \operatorname{senh}^2 z &= \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2z} + 2 + e^{-2z} + e^{2z} - 2 + e^{-2z}\right) \\ &= \frac{e^{2z} + e^{-2z}}{2} = \cosh(2z).\end{aligned}$$

5. Mostre que

$$\cos \overline{z} = \overline{\cos z}$$

Resolução:

Fazendo $z = x + \mathrm{i}y$ obtém-se por um lado que

$$\cos \overline{z} = \cos(x - \mathrm{i}y) = \cos x \cos(\mathrm{i}y) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\mathrm{i}y) = \cos x \cosh y + \mathrm{i} \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$

e por outro lado

$$\begin{aligned}\overline{\cos z} &= \overline{\cos(x + \mathrm{i}y)} = \overline{\cos x \cos(\mathrm{i}y) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\mathrm{i}y)} \\ &= \overline{\cos x \; \cosh y - \mathrm{i} \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y} \\ &= \cos x \cosh y + \mathrm{i} \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y\end{aligned}$$

e é fácil de verificar que a igualdade pedida é verdadeira.

6. Calcule o valor principal (i.e., tomando na função $\log z$ o ângulo correspondente à restrição principal) de:

a) $\log(-\mathrm{i})$ b) $\log(1 - \mathrm{i})$ c) $\log(-2)$ d) $\log(\mathrm{i} + \sqrt{3})$
e) $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{1+\mathrm{i}}$ f) $2\log(-1 - \mathrm{i})$ g) $\log\left((-1 - \mathrm{i})^2\right)$

Resolução:

(a) $\log(-\mathrm{i}) = \log(1e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}) = \log 1 - \dfrac{\mathrm{i}\pi}{2} = -\dfrac{\mathrm{i}\pi}{2}$

(b) $\log(1 - \mathrm{i}) = \log(\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}) = \dfrac{1}{2}\log 2 - \mathrm{i}\dfrac{\pi}{4}$

(c) $\log(-2) = \log(2e^{\mathrm{i}\pi} = \log 2 + \mathrm{i}\pi$

(d) $\log(\mathrm{i} + \sqrt{3}) = \log(2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}) = \log 2 + \mathrm{i}\dfrac{\pi}{6}$

(e) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i} = e^{(1+i)\log(\frac{1+i}{\sqrt{2}})} = e^{(1+i)i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}(1+i)$

(f) $2\log(-1-\mathrm{i}) = 2\log(\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}} = 2\log 2 - \mathrm{i}\dfrac{3\pi}{2}$

(g) $\log\Big((-1-\mathrm{i})^2\Big) = \log(2\mathrm{i}) = \log\Big(2e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\Big) = \log 2 + \dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$

7. Determine todas as soluções das seguintes equações:

a) $e^z = 2$ b) $\log z = 1 + 2\pi\mathrm{i}$ c) $\mathrm{sen}(2z) = 5$
d) $e^{\mathrm{i}z} = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ e) $\cosh(\mathrm{i}z) = 0$

Resolução:

(a) $e^z = 2 \;\Leftrightarrow\; z = \log 2 + 2k\pi i$ com $k \in \mathbb{Z}$.

(b) $\log z = 1 + 2\pi i \;\Rightarrow\; z = e^{1+2\pi i} = e$

Nota: $\log e = 1 + 2\pi$i, apenas com uma escolha adequada do ramo do logaritmo.

(d) Pela definição de seno

$$\mathrm{sen}(2z) = 5 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i} = 5$$

e multiplicando todos os termos da equação por e^{2iz}

$$e^{4iz} - 10ie^{2iz} - 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{2iz} = \frac{10i \pm \sqrt{-96}}{2} = (5 \pm 2\sqrt{6})i$$

Então

$$2iz = \log\Big((5 \pm 2\sqrt{6})\mathrm{i}\Big) + 2k\pi\mathrm{i} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Finalmente, dado que $5 \pm 2\sqrt{6}$ são ambos reais positivos,

$$z = \frac{-i}{2}\Big(\log(5 \pm 2\sqrt{6}) + i\frac{\pi}{2}\Big) + k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

ou seja

$$z = \frac{\pi}{4} + k\pi - \frac{i}{2}\Big(\log(5 \pm 2\sqrt{6}) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

(d) Escrevendo o segundo membro da equação na forma trigonométrica,

$$e^{\mathrm{i}z} = \sqrt{3} + \mathrm{i} \quad\Leftrightarrow\quad e^{-y}e^{\mathrm{i}x} = 2e^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$$

Pela igualdade de complexos na forma trigonométrica, obtem-se

$$\begin{cases} e^{-y} = 2 \\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -\log 2 \\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ou seja as soluções da equação são $\frac{\pi}{6} + 2k\pi - \mathrm{i}\log 2$ com $k \in \mathbb{Z}$.

(e) Tendo em conta que

$$\cosh(\mathrm{i}z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

para $k \in \mathbb{Z}$.

8. Escreva $f(A)$, sendo $f(z) = \frac{1}{z}$, $c \in \mathbb{R}$ e

   (a) $A = \{z \ : \ \mathrm{Re}\, z = c\}$

   (b) $A = \{z \ : \ \mathrm{Im}\, z = c\}$

   (c) $A = \{z \ : \ \arg z = c\}$

   (d) $A = \{z \ : \ |z| = c\}$

Resolução:

Seja $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ o domínio de f.

(a) O conjunto A é caracterizado por $z \in D$ tal que $\mathrm{Re}\, z = c$ ou seja por $\frac{z+\overline{z}}{2} = c$.

- Se $c = 0$, e fazendo $w = f(z) = \frac{1}{z}$ tem-se que $f(A)$ será caracterizado por

$$\frac{1}{w} + \frac{1}{\overline{w}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\, w = 0$$

ou seja $f(A) = A$.

- Se $c \neq 0$, e fazendo $w = f(z) = \frac{1}{z}$ tem-se que $f(A)$ será caracterizado por

$$\frac{1}{w} + \frac{1}{\overline{w}} = c \quad \Leftrightarrow \quad w + \overline{w} = 2c|w|^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,\mathrm{Re}\, w = c|w|^2$$

Se $w = u + \mathrm{i}v$ tem-se que $f(A)$ será caracterizado por

$$\frac{2u}{c} = u^2 + v^2 \quad \Leftrightarrow \quad (u - \frac{1}{c})^2 + v^2 = \frac{1}{c^2}$$

isto é, $f(A)$ é a circunferência de centro $(\frac{1}{c}, 0)$ e de raio $\frac{1}{|c|}$.

(b) O conjunto A é caracterizado por $\mathrm{Im}\, z = c$ ou seja por $\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}} = c$.

- Se $c = 0$, e fazendo $w = f(z) = \frac{1}{z}$ tem-se que $f(A)$ será caracterizado por

$$\frac{1}{w} - \frac{1}{\overline{w}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} w = 0$$

ou seja $f(A) = A$.

- Se $c \neq 0$, e fazendo $w = f(z) = \frac{1}{z}$ tem-se que $f(A)$ será caracterizado por

$$\frac{1}{w} - \frac{1}{\overline{w}} = 2\mathrm{i}c \quad \Leftrightarrow \quad \overline{w} - w = 2\mathrm{i}c|w|^2 \quad \Leftrightarrow \quad -\operatorname{Im} w = c|w|^2$$

Se $w = u + \mathrm{i}v$ tem-se que $f(A)$ será caracterizado por

$$-\frac{v}{c} = u^2 + v^2 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 + (v + \frac{1}{2c})^2 = \frac{1}{4c^2}$$

isto é, $f(A)$ é a circunferência de centro $(0, -\frac{1}{2c})$ e de raio $\frac{1}{2|c|}$.

(c) O conjunto A é caracterizado por $\arg z = c$.

- Se $c = 0$, $A = \{z = \alpha \in \mathbb{R}^+\}$. Assim, $f(A) = \{w = \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{R}^+\}$ pelo que $f(A) = A$.
- Se $c \neq 0$, e fazendo $w = f(z) = \frac{1}{z}$ tem-se que $f(A)$ é caracterizado por $\arg \frac{1}{w} = c$ ou seja $\arg w = -c$.

(d) O conjunto A é caracterizado por $|z|^2 = z\overline{z} = c^2$. Fazendo $w = f(z) = \frac{1}{z}$, então $f(A)$ é dado por

$$c^2 = z\overline{z} = \frac{1}{w\overline{w}} = \quad \Leftrightarrow \quad |w|^2 = \frac{1}{c^2} \quad \Leftrightarrow \quad |w| = \frac{1}{c}$$

isto é, $f(A)$ é a circunferência centrada na origem e de raio $\frac{1}{c}$.

9. Calcule os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{z\to 1+2\mathrm{i}} \Big(3xy + \mathrm{i}(x - y^2)\Big)$ b) $\displaystyle\lim_{z\to 1+\mathrm{i}} \frac{z^2 - 5}{\mathrm{i}z}$ c) $\displaystyle\lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{z(z^2+1)}{z - \mathrm{i}}$

Resolução:

(a) Atendendo a que a função definida por $(3xy + \mathrm{i}(x - y^2))$ é contínua em $\mathbb{C}$, substituindo x por 1 e y por 2, obtém-se

$$\lim_{z\to 1+2\mathrm{i}} \Big(3xy + \mathrm{i}(x - y^2)\Big) = 6 - 3\mathrm{i}$$

(b) Atendendo a que a função definida por $\frac{z^2-5}{\mathrm{i}z}$ é contínua em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, substituindo z por $1 + \mathrm{i}$ obtém-se

$$\lim_{z\to 1+\mathrm{i}} \frac{z^2 - 5}{\mathrm{i}z} = \frac{(1+\mathrm{i})^2 - 5}{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})} = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$$

(c) A função dada por $\frac{z(z^2+1)}{z-\mathrm{i}}$ não está definida em $z=\mathrm{i}$, mas

$$\lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{z(z^2+1)}{z-\mathrm{i}} = \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{z(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-\mathrm{i}} = \lim_{z\to\mathrm{i}} z(z+\mathrm{i}) = -2$$

10. Mostre que a função $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{|z^2|} & \text{se} \quad z\neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad z=0 \end{cases}$$

não é contínua em $z=0$

Resolução:

Vamos averiguar a existência do limite de $f(z)$ quando z converge para 0. Caso não exista, o resultado está demonstrado assim como caso exista e seja diferente de 0. Para $z\neq 0$, fazendo $z=x+\mathrm{i}y$ e substituindo, obtem-se

$$f(x+\mathrm{i}y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\frac{2xy}{x^2+y^2} \equiv u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

Vamos calcular o limite de $u(x,y)$ quando (x,y) cpnverge para $(0,0)$ em dois casos especiais: primeiro quando (x,y) converge para $(0,0)$ no eixo real, e em seguida quando (x,y) converge para $(0,0)$ no eixo imaginário. Assim

- Se (x,y) cpnverge para $(0,0)$ no eixo real, significa que $y=0$ e $x\to 0$. Então

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{y^2} = 1$$

- Se (x,y) converge para $(0,0)$ no eixo imaginário, significa que $x=0$ e $y\to 0$. Então

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{-y^2} = -1$$

Conclui-se que $\lim_{z\to 0} \operatorname{Re} f(z)$ não existe. Dado que $\lim_{z\to 0} f(z)$ existe sse $\lim_{z\to 0} \operatorname{Re} f(z)$ e $\lim_{z\to 0} \operatorname{Im} f(z)$ existem, concluimos que $\lim_{z\to 0} f(z)$ não existe e assim a funão f não é contínua em 0.

11. Mostre que a função $v(x,y)=\arg(x+y\mathrm{i})$ é descontínua no semi-eixo real negativo.

Resolução:

Seja $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x_0 < 0$. Então para $y > 0$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \arg(x + y\mathrm{i}) = \pi$$

enquanto que para $y < 0$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \arg(x + y\mathrm{i}) = -\pi$$

Podemos assim concluir que, para $x_0 < 0$, não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} v(x, y)$.

2 Exercícios Propostos

1. Escreva na forma $a + bi$ os seguintes números complexos:

(a) $2e^{4\pi\mathrm{i}/3}$ (b) $e^{\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$ (c) $\cos(\pi + \mathrm{i})$ (d) $\mathrm{sh}\,\dfrac{\mathrm{i}\pi}{2}$

2. Sendo $z = re^{\mathrm{i}\theta}$, calcule $|e^{\mathrm{i}z}|$.

3. Estabeleça as seguintes identidades (onde z, $w \in \mathbb{C}$):

(a) $\cos(\mathrm{i}z) = \cosh(z)$ (b) $\mathrm{sen}(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}\,\mathrm{senh}\, z$ (c) $\cos^2 z + \mathrm{sen}^2 z = 1$

(d) $\overline{\cos z} = \cos \overline{z}$ (e) $\mathrm{sen}(z + w) = \mathrm{sen}\, z \cdot \cos w\, + \cos z \cdot \mathrm{sen}\, w$

4. Calcule o valor principal (i.e., tomando na função $\log z$ o ângulo correspondente à restrição principal) de:

(a) $\log(-e)$ (b) $\log(\sqrt{3} + \mathrm{i})$ (c) $\log(1 - \mathrm{i})$

(d) $2^{-\mathrm{i}}$ (e) i^{i} (f) $(-\mathrm{i})^{1-\mathrm{i}}$

5. Determine os subconjuntos de $\mathbb{C}$ onde a funçao $f(z) = \log\left(\frac{z+1}{z}\right)$ (valor principal) :

(a) está definida;

(b) é contínua.

6. Considere os números complexos $z = -\mathrm{i}$ e $w = -1 + \mathrm{i}$. Mostre que

$$\log \frac{z}{w} = \log z - \log w + 2k_0\pi\mathrm{i}$$

determinando o valor de k_0.

7. Resolva as seguintes equações em $\mathbb{C}$:

a) $\operatorname{senh}(\mathrm{i}z) = -\mathrm{i}$ b) $\log(\mathrm{i} - z) = 1$ c) $e^z = -1$ d) $\operatorname{sen} z = 3\mathrm{i}$

e) $\log z = \left(2 - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\pi$ f) $e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z} + 2 = 0$ g) $\overline{e^{\mathrm{i}z}} = e^{\mathrm{i}\overline{z}}$ h) $|e^{\mathrm{i}z}| = 1$

8. Para uma função f, define-se

$$Z(f) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ f(z) = 0\}$$

Determine o conjunto $Z(f)$ para cada uma das funções

(a) $(z^4 - 1)\operatorname{sen}(\pi z)$ (b) $\cosh^2 z$ (c) $1 + e^{2z}$

(d) $\operatorname{sen}^2\left(1/z\right)$ $(z \neq 0)$ (e) $1 - e^{z^2}$ (f) $1 + e^{z^2}$

9. Indique o domínio das seguintes funções complexas de variável complexa:

(a) $f(z) = \dfrac{z}{z + 3\mathrm{i}}$ (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2}$

(c) $f(z) = f(x + iy) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}xy$ (d) $f(z) = f(x + iy) = \log x + (x - 2y)\mathrm{i}$

10. Determine a parte real e a parte imaginária de cada uma das funções:

a) $\overline{z} + \mathrm{i}z^2$ b) $\mathrm{i} - z^3$ c) $\overline{z}/z$ d) $e^z(z - \mathrm{i})$

11. Esboçe a imagem pela aplicação f do conjunto A indicado:

(a) $f(z) = z^2$, $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Arg} z = \alpha\}$ com $\alpha \in [0, \pi]$

(b) $f(z) = (z - \mathrm{i})^{-1}$, $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - \mathrm{i}| = 2\}$

(c) $f(z) = e^z$ $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \text{const.}\}$

(d) $f(z) = \log z$ $A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 2 < |z| < e \ \text{ e } \ \frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg} z < \frac{7\pi}{4}\}$ utilizando o valor principal do logaritmo.

(e) $f(z) = \frac{1}{z}$ $A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ z + \overline{z} = 2\}$

12. Determine, ou mostre que não existe, cada um dos seguintes limites

(a) $\displaystyle\lim_{z \to -i} \frac{z^2 + 3\mathrm{i}z - 2}{z + i}$ (b) $\displaystyle\lim_{z \to -1+2i} \left(3xy + \mathrm{i}(x - y^2)\right)$ (c) $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{\overline{z}}{|z|}$

(d) $\displaystyle\lim_{z \to 1+i} \frac{z^2 - 5}{\mathrm{i}z}$ (e) $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$ (f) $\displaystyle\lim_{z \to 0} \left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^2$

13. Mostre que a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^3}{|z|^3} & \text{se} \quad z \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se} \quad z = 0 \end{cases}$$

não é contínua em $z = 0$.

14. Dado um número real $a \in [-1, 1]$, mostre que as equações $\operatorname{sen} z = a$ e $\cos z = a$, onde $z \in \mathbb{C}$, têm apenas soluções reais. Determine essas soluções nos casos

$$(a) \quad a = 0 \qquad\qquad (b) \quad a = -\sqrt{2}/2$$

3 Soluções de 2.2

1. (a) $-(1 + i\sqrt{3})$ **(b)** $\frac{\sqrt{2e}}{2}(1 - i)$ **(c)** $-\cosh 1$ **(d)** i

2. $|e^{\mathrm{i}z}| = e^{-r \operatorname{sen} \theta}$

4. (a) $1 + i\pi$ **(b)** $\log 2 + \frac{\pi}{6}\mathrm{i}$ **(c)** $\frac{\log 2}{2} - \frac{i\pi}{4}$ **(d)** $\cos(\log 2) - i \operatorname{sen}(\log 2)$ **(e)** $e^{-\pi/2}$ **(f)** $-\mathrm{i}e^{-\pi/2}$

5. (a) Domínio de $f = D_f = \mathbb{C} \setminus \{-1,\ 0\}$ **(b)** f é contínua em

$$\{z \in D_f \ : \ \frac{z+1}{z} \notin \mathbb{R}^-\} = \{z \in D_f \ : \ \operatorname{Im} z = 0 \ , \ \operatorname{Re} z \notin]-1, 0[\}$$

6. $k_0 = 0$

7. (a) $\frac{\pi}{2}(-1 + 4k)$, $k \in \mathbb{Z}$ **(b)** $-e + i$ **(c)** $(2k+1)i\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
(d) $(2k+1)\pi - i\log(3 + \sqrt{10})$, $2k\pi - i\log(-3 + \sqrt{10}),\ k \in \mathbb{Z}$ **(e)** $-e^{2\pi}i$
(f) $(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ **(g)** $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ quad **(h)** $z = x \in \mathbb{R}$.

8. (a) $z \in \{\pm i\} \cup \{k \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ **(b)** $z \in \{\frac{\pi}{2}(1+2k)i \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$
(c) $z \in \{\frac{\pi}{2}(1+2k)i \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ **(d)** $z \in \left\{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$
(e) $z \in \{\pm\sqrt{n\pi}(1+i) \ : \ n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\pm\sqrt{n\pi}(1-i) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$
(f) $z \in \left\{\pm\sqrt{\pi\big(n + \frac{1}{2}\big)}(1+i) \ : \ k \in \mathbb{N}_0\right\} \cup \left\{\pm\sqrt{\pi\big(n - \frac{1}{2}\big)}(1-i) \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$

9. (a) $\mathbb{C} \setminus \{-3i\}$ **(b)** $\mathbb{C} \setminus \{i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\}$ **(c)** $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ **(d)** $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} z > 0\}$

10. (a) $\begin{cases} \operatorname{Re} f(x,y) = x - 2xy \\ \operatorname{Im} f(x,y) = x^2 - y^2 - y \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} \operatorname{Re} f(x,y) = 3xy^2 - x^3 \\ \operatorname{Im} f(x,y) = 1 - 3x^2y + y^3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \operatorname{Re} f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \\ \\ \operatorname{Im} f(x,y) = \frac{-2xy}{x^2 + y^2} \end{cases}$ **(d)** $\begin{cases} \operatorname{Re} f(x,y) = xe^x \cos y - (y-1)e^x \operatorname{sen} y \\ \operatorname{Im} f(x,y) = (y-1)e^x \cos y + xe^x \operatorname{sen} y \end{cases}$

11. **(a)** $f(A) = \{z \in \mathbb{C} \, : \, \operatorname{Arg} z = 2\alpha\}$ **(b)** $f(A) = \{z \in \mathbb{C} \, : \, |z| = \frac{1}{2}\}$
(c) $f(A) = \{z \in \mathbb{C} \, : \, |z| = e^c\}$
(d) $f(A) = \{z \in \mathbb{C} \, : \, \operatorname{Re} f \in]\log 2, 1[\text{ e } \operatorname{Im} f \in] -\pi, \frac{\pi}{4}[\cup] \frac{\pi}{4}, \pi]\}$
(e) $f(A) = \{z \in \mathbb{C} \, : \, |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}\}$

12. **(a)** i **(b)** $-6 - 5i.$ **(c)** não existe **(d)** $\frac{7}{2} + \frac{3}{2}i$ **(e)** não existe **(f)** não existe

14. Sugestão: estude a parte imaginária das soluções.