TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais
1º Semestre 2020/2021
Curso: MEQ, MEAmbi

Ficha de Problemas nº 10
Equações Lineares de Ordem n

1 Exercícios Resolvidos

1. Determine a solução geral das seguintes equações:

$$(\mathbf{a})\ y'' + 9y' + 20y = 0 \qquad (\mathbf{b})\ y'' + \pi^2 y = 0 \qquad (\mathbf{c})\ y'' + 2y' + y = 0$$

Resolução

(a) Usando a notação $y' = Dy$ (e como tal $y'' = D^2y$) obtém-se

$$y'' + 9y' + 20y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + 9D + 20)y = 0.$$

Tem-se então que os zeros do polinómio característico associado são

$$P(r) = r^2 + 9r + 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = -4 \ \vee \ r = -5.$$

Assim a equação é equivalente a

$$(D+4)(D+5)y = 0 \quad \Leftarrow \quad (D+4)y = 0 \ \text{ ou } \ (D+5)y = 0.$$

Na seguinte tabela representamos as raízes de $P(r)$ e respectivas multiplicidades (ou ordens) e os correspondentes elementos da base do espaço de soluções da equação diferencial:

Raiz	Multiplicidade	Base
-4	1	e^{-4t}
-5	1	e^{-5t}

Tem-se então que uma base do espaço de soluções da equação $(D^2 + 9)(D + 20)y = 0$ é, por exemplo $\mathcal{B} = \left\{e^{-4t},\ e^{-5t}\right\}$. Assim, a sua solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-5t} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Usando a notação $y' = Dy$, obtém-se

$$y'' + \pi^2 y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + \pi^2)y = 0.$$

Tem-se então que a raiz do polinómio característico associado é

$$P(r) = r^2 + \pi^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm i\pi$$

Neste caso, como ocorrem raízes complexas, acrescentamos à tabela introduzida na alínea (a) uma coluna com uma base constituída apenas por funções reais:

Raiz	**Multiplicidade**	**Base Complexa**	**Base Real**
$\pm\pi i$	1	$e^{i\pi t}$, $e^{-i\pi t}$	$\cos(\pi t)$, $\operatorname{sen}(\pi t)$

Tem-se então que uma base do espaço de soluções (reais) da equação $(D^2 + \pi^2)y = 0$ é, por exemplo $\mathcal{B} = \big\{ \cos(\pi t),\ \operatorname{sen}(\pi t) \big\}$ e assim a sua solução geral é

$$y(t) = c_1 \cos(\pi t) + c_2 \operatorname{sen}(\pi t) \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(c) Usando a notação $y' = Dy$, obtém-se

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + 2D + 1)y = 0.$$

Tem-se então que o polinómio característico associado é $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$ cuja única raiz é -1. Então:

Raiz	**Multiplicidade**	**Base**
-1	1	e^{-t}, te^{-t}

Tem-se então que uma base do espaço de soluções da equação $(D^2 + 2D + 1)y = 0$ é, por exemplo $\mathcal{B} = \{e^{-t},\ te^{-t}\}$. Assim, a sua solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Seja $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Determine a solução da seguinte equação diferencial:

$$y'' - ky = 0$$

Sugestão: o cálculo da base do espaço de soluções da equação depende do sinal de k.

Resolução

(a) Usando a notação $y' = Dy$, a equação $y'' - ky = 0$ pode-se escrever na forma:

$$(D^2 - k)y = 0$$

Tem-se pois que o polinómio característico associado é $P(r) = r^2 - k = 0$. Para determinar as raízes do polinómio característico e as correspondentes soluções da equação diferencial, é conveniente considerar 3 casos.

Caso 1 ($k > 0$) :
Neste caso o polinómio característico tem duas raízes reais distintas $\pm\sqrt{k}$ e, assim:

Raiz	**Multiplicidade**	**Base**
$-\sqrt{k}$	1	$e^{-\sqrt{k}t}$
$\sqrt{k}$	1	$e^{\sqrt{k}t}$

Desta forma, uma base do espaço de soluções da equação $(D^2 - k)y = 0$ pode ser $\mathcal{B} = \left\{e^{-\sqrt{k}t},\ e^{\sqrt{k}t}\right\}$. Assim, a solução geral da equação é, neste caso:

$$y(t) = c_1 e^{-\sqrt{k}t} + c_2 e^{\sqrt{k}t} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Caso 2 ($k = 0$) : Neste caso, o polinómio característico tem uma única raiz, 0. Tendo em conta que $e^{0t} = 1$:

Raiz	**Multiplicidade**	**Base**
0	2	1, t

Uma base do espaço de soluções da equação $D^2 y = 0$ é, por exemplo, $\mathcal{B} = \left\{1,\ t\right\}$ e, assim, a sua solução geral é

$$y(t) = c_1 + c_2 t \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Caso 3 ($k < 0$) :
Neste caso o polinómio característico tem duas raízes complexas conjugadas, $\pm i\sqrt{|k|} = \pm i\omega$ (definindo $\omega = \sqrt{|k|}$).

Raiz	**Multiplicidade**	**Base Complexa**	**Base Real**
$\pm\, i\sqrt{\|k\|} = \pm i\omega$	1	$e^{i\omega t}$, $e^{-i\omega t}$	$\cos(\omega t)$, $\operatorname{sen}(\omega t)$

Tem-se então que a solução geral da equação é, neste caso

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega x) \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(onde $\omega = \sqrt{|k|} = \sqrt{-k} \Leftrightarrow k = -\omega^2$).

3. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

(a) $\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1 \ , \ \ y'(0) = -2 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} y'' + 4y' + 3y = 0 \\ y(0) = 0 \ , \ \ y'(0) = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 0 \\ y(0) = 1 \ , \ \ y'(0) = 0 \end{cases}$

Resolução

(a) Vamos, em primeiro lugar calcular a solução geral da equação. Usando a notação $y' = Dy$, obtém-se

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + 2D + 5)y = 0$$

O polinómio característico associado é $P(r) = r^2 + 2r + 5$, e as suas raízes são $-1 \pm 2i$. Assim uma base complexa é

$$\mathcal{B}_c = \left\{ e^{(-1+2i)t},\ e^{(-1-2i)t} \right\}$$

e a respectiva base real é

$$\mathcal{B} = \left\{ e^{-t}\cos(2t),\ e^{-t}\operatorname{sen}(2t) \right\}$$

A sua solução geral é

$$y(t) \ = \ c_1 e^{-t}\cos(2t) + c_2 e^{-t}\operatorname{sen}(2t)\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Temos agora que determinar c_1 e c_2 de modo a que $y(0) = 1$ e $y'(0) = -2$. Sendo a solução geral, $y(t)$, dada pela expressão anterior, tem-se que

$$y'(t) \ = \ -c_1 e^{-t}\cos(2t) - 2c_1 e^{-t}\operatorname{sen}(2t) - c_2 e^{-t}\operatorname{sen}(2t) + 2c_2 e^{-t}\cos(2t)$$

Então

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 1 \\ -c_1 + 2c_2 = -2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Resulta pois que a solução do PVI é

$$y(t) \ = \ e^{-t}\cos(2t) - \frac{1}{2} e^{-t}\operatorname{sen}(2t)$$

(b) Vamos, em primeiro lugar calcular a solução geral da equação. A equação diferencial escrita com a notação $y' = Dy$ é

$$(D^2 + 4D + 3)y = 0$$

O polinómio característico associado é $P(r) = r^2 + 4r + 3 = (r+1)(r+3)$. Como tal

Raiz	**Multiplicidade**	**Base**
-1	1	e^{-t}
-3	1	e^{-3t}

Tem-se então que uma base do espaço de soluções da equação $(D^2+4D+3)y=0$ é dada por $\mathcal{B}=\{e^{-t},\ e^{-3t}\}$ e, assim, a sua solução geral é

$$y(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-3t} \quad , \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Resta-nos determinar os valores de c_1 e c_2 para os quais $y(0)=0$ e $y'(0)=2$. Sendo $y(t)$ a solução geral acima obtida, tem-se que

$$y'(t)=-c_1e^{-t}-3c_2e^{-3t}$$

Então

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1+c_2=0 \\ -c_1-3c_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ c_2=-1 \end{cases}$$

Podemos concluir que a solução do PVI é

$$y(t)=e^{-t}-e^{-3t}$$

(c) Vamos, em primeiro lugar calcular a solução geral da equação. Usando a notação $y'=Dy$, obtém-se

$$y''+6y'+9y=0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2+6D+9)y=0$$

Tem-se então que o polinómio característico associado é $P(r)=r^2+6r+9=(r+3)^2$. Assim

Raiz	**Multiplicidade**	**Base**
-3	2	e^{-3t}, te^{-3t}

Tem-se então que uma base do espaço de soluções (reais) da equação $(D^2+6D+9)y=0$ pode $\mathcal{B}=\{e^{-3t},\ te^{-3t}\}$ e, assim, a sua solução geral é

$$y(t)=c_1e^{-3t}+c_2te^{-3t} \quad , \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Resta determinar c_1 e c_2 de modo a que $y(0)=1$ e $y'(0)=0$. Sendo $y(t)$ a solução geral anteriormente obtida, tem-se que

$$y'(t)=-3c_1e^{-3t}+c_2e^{-3t}-3c_2te^{-3t}.$$

Assim sendo,

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ -3c_1+c_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ c_2=3 \end{cases}$$

Finalmente, a solução do PVI é

$$y(t)=e^{-3t}+3te^{-3t}.$$

4. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais.

$$(\mathbf{a})\ \ y''' + y'' - 2y' = 0$$
$$(\mathbf{b})\ \ y^{(4)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0$$
$$(\mathbf{c})\ \ y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

Resolução

(a) Usando a notação $y' = Dy$, obtém-se

$$y''' + y'' - 2y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^3 + D^2 - 2D)y = 0$$

O polinómio característico associado é

$$P(r) = r^3 + r^2 - 2r = r(r^2 + r - 2) = r(r-1)(r+2)$$

Assim as soluções de

$$(D^3 + D^2 - 2D)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D(D-1)(D+2)y = 0$$

obtêm-se de acordo com a seguinte tabela:

Raiz	**Multiplicidade**	**Base**
0	1	$e^{0t} = 1$
1	1	e^{t}
-2	1	e^{-2t}

Desta forma, uma base do espaço de soluções da equação $(D^3+D^2-2D)y = 0$ é (por exemplo) $\mathcal{B} = \{1,\ e^t,\ e^{-2t}\}$ e, assim, a sua solução geral é

$$y(t) = c_1 + c_2 e^t + c_2 3e^{-2t} \quad , \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

(b) Usando a notação $y' = Dy$, a equação diferencial pode-se escrever na forma:

$$(D^4 + D^3 - 3D^2 - 5D - 2)y = 0$$

O polinómio característico associado é

$$P(r) = r^4 + r^3 - 3r^2 - 5r - 2$$

É fácil de descobrir duas raízes de $P(r)$; de facto, verifica-se que $P(-1) = 0$ e $P(2) = 0$. Usando (por exemplo) a regra de Rufini, obtém-se a factorização

$$P(r) = (r+1)(r-2)(r^2 + 2r + 1) = (r+1)^3(r-2),$$

de onde resulta a tabela seguinte

Raiz	Multiplicidade	Base
-1	3	e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}
2	1	e^{2t}

Tem-se então que uma base do espaço de soluções da equação $(D^3+D^2-2D)y=0$ é, por exemplo $\mathcal{B}=\left\{e^{-t},\ te^{-t},\ t^2e^{-t},\ e^{2t}\right\}$ e assim a sua solução geral é

$$y(t)=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}+c_3t^2e^{-t}+c_4e^{2t} \quad , \quad c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}.$$

(b) Usando a notação $y'=Dy$, obtém-se

$$y^{(4)}+2y''+y=0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^4+2D^2+1)y=0$$

O polinómio característico associado é

$$P(r)=r^4+2r^2+1=(r^2+1)^2=(r+i)^2(r-i)^2$$

Assim

$$(D^4+2D^2+1)y=0 \quad \Leftrightarrow \quad (D-i)^2(D+i)^2y=0$$

Raiz	Multiplicidade	Base Complexa	Base Real
$\pm i$	2	e^{it}, te^{it}, e^{-it}, te^{-it}	$\cos t$, $\operatorname{sen} t$, $t\cos t$, $t\operatorname{sen} t$

A solução geral pode então ser dada por:

$$y(x)=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t+c_3t\cos t+c_4t\operatorname{sen} t \quad , \quad c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}.$$

5. Resolva os seguintes problemas de valor inicial.

(a) $\begin{cases} y^{(4)}-4y'''+6y''-4y'+y=0 \\ y(0)=1, \qquad y'(0)=1, \\ y''(0)=-1, \quad y'''(0)=1. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y'''-5y''-22y'+56y=0 \\ y(0)=1, \quad y'(0)=-1, \quad y''(0)=1. \end{cases}$

Resolução

(a) Vamos, em primeiro lugar calcular a solução geral da equação. Usando a notação $y' = Dy$, obtém-se

$$y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^4 - 4D^3 + 6D^2 - 4D + 1)y = 0$$

O polinómio característico associado é $P(r) = r^4 - 4r^3 + 6r^2 - 4r + 1$. Pela formula do binómio de Newton:

$$P(r) = (r-1)^4$$

Assim sendo,

$$(D^4 - 4D^3 + 6D^2 - 4D+)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D-1)^4 y = 0,$$

Uma base do espaço de soluções da equação $(D-1)^4 y = 0$ é $\mathcal{B} = \{e^t,\ te^t,\ t^2e^t,\ t^3e^t\}$, pelo que a sua solução geral pode ser dada por

$$y(t) = c_0e^t + c_1te^t + c_2t^2e^t + c_3t^3e^t \quad , \quad c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Resta então determinar c_0,c_1,c_2 e c_3 de modo a que $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$ e $y'''(0) = 1$. Sendo $y(t) = \left(c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3\right)e^t$, tem-se que

$$\begin{cases} y'(t) = \left(c_0 + c_1 + (c_1 + 2c_2)t + (c_2 + 3c_3)t^2 + c_3t^3\right)e^t \\ y''(t) = \left(c_0 + 2c_1 + 2c_2 + (c_1 + 4c_2 + 6c_3)t + (c_2 + 6c_3)t^2 + c_3t^3\right)e^t \\ y'''(t) = \left(c_0 + 3c_1 + 6c_2 + 6c_3 + (c_1 + 6c_2 + 18c_3)t + (c_2 + 10c_3)t^2 + c_3t^3\right)e^t \end{cases}$$

pelo que

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = -1 \\ y'''(0) = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_0 + c_1 = 1 \\ c_0 + 2c_1 + 2c_2 = -1 \\ c_0 + 3c_1 + 6c_2 + 6c_3 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

Finalmete, a solução do (PVI) é

$$y(t) = (1 - t^2 + t^3)e^t$$

(b) Vamos, em primeiro lugar calcular a solução geral da equação. Usando a notação $y' = Dy$, obtém-se

$$y''' - 5y'' - 22y' + 56y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^3 - 5D^2 - 22D + 56)y = 0 \tag{1}$$

Tem-se então que o polinómio característico associado é $P(r) = r^3 - 5r^2 - 22r + 56$. Tendo em conta que $P(2) = 0$, dividindo $P(r)$ por $r - 2$,

	1	-5	-22	56
2		2	-6	-56
	1	-3	-28	0

obtém-se a factorização:

$$P(r) = (r-2)(r^2-3r-28) = (r-2)(r-4)(r-7)$$

Resulta pois que (1) é equivalente à equação diferencial

$$(D-1)(D-4)(D-7)y = 0,$$

cujo espaço de soluções possui a seguinte base

Raiz	**Multiplicidade**	**Base**
2	1	e^{2t}
4	1	e^{4t}
7	1	e^{7t}

A solução geral da equação (1) é, pois:

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{4t} + c_3e^{7t}, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Para resolver o problema de valor inicial, resta determinar c_1,c_2 e c_3 de forma a que as condições iniciais sejam satisfeitas. Calculando as derivadas da solução geral,

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2c_1e^{2t} + 4c_2e^{4t} + 7c_3e^{7t}, \\ y''(t) &= 4c_1e^{2t} + 16c_2e^{4t} + 49c_3e^{7t}, \end{aligned}$$

resulta que

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ 2c_1 + 4c_2 + 7c_3 = -1 \\ 4c_1 + 16c_2 + 49c_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = -4 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

Desta forma, a solução do PVI é

$$y(t) = 4e^{2t} - 4e^{4t} + e^{7t}$$

6. Encontre a equação diferencial linear homogénea de menor ordem possível tal que as seguintes funções sejam suas soluções.

   (a) $y_1(t) = e^{-t\sqrt{3}}$, $y_2(t) = te^{t\sqrt{3}}$

   (b) $y_1(x) = e^x\cos(2x)$ e $y_2(x) = xe^{-x}$

   (c) $y(x) = x^2$

Resolução

(a) Dado que $y_2(t) = te^{t\sqrt{3}}$ é solução, então também $y_3(t) = e^{t\sqrt{3}}$ o é; isto porque $\sqrt{3}$ é certamente raiz do polinómio característico da equação. As funções y_1, y_2 e y_3 formam uma base de um espaço de dimensão 3 (visto serem 3 funções linearmente independentes); em consequência, a equação diferencial de menor ordem que as admite como soluções é de ordem 3. Consideraramos uma versão inversa da tabela anteriormente introduzida

Base	**Raiz**	**Multiplicidade**	**Termo de** $p(D)$
$e^{-t\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	1	$D+\sqrt{3}$
$e^{t\sqrt{3}}$, $te^{t\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	2	$(D-\sqrt{3})^2$

Isto significa que $e^{t\sqrt{3}}$ e $te^{t\sqrt{3}}$ são soluções de $(D-\sqrt{3})^2 y = 0$, enquanto $e^{-t\sqrt{3}}$ é uma solução de $(D+\sqrt{3})y = 0$. Assim sendo, as funções y_1 e y_2 são soluções da equação

$$(D-\sqrt{3})^2(D+\sqrt{3})y = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (D^3 - \sqrt{3}D^2 - 3D + 3\sqrt{3})y = 0.$$

A equação pedida é

$$y''' - \sqrt{3}y'' - 3y' + 3\sqrt{3}y = 0$$

(b) Começamos por notar que se $e^x\cos(2x)$ é solução da equação também $e^x\operatorname{sen}(2x)$; da mesma forma, se xe^{-x} é solução da equação também e^{-x} o é. Tem-se então que $e^x\cos(2x)$, $e^x\operatorname{sen}(2x)$, xe^{-x} e e^{-x} formam uma base do espaço de soluções da equação pedida, o que mostra que tem que ser de ordem 4. Podemos então considerar a tabela

Base Real	**Base Complexa**	**Raiz**	**Mult.**	**Termo de** $p(D)$
e^{-x}, xe^{-x}	e^{-x}, xe^{-x}	-1	1	$(D+1)^2$
$e^x\cos(2x)$,$e^x\operatorname{sen}(2x)$	$e^{(1+2i)x}$, $e^{(1-2i)x}$	$1\pm 2i$	1	$\big(D-(1+2i)\big)\big(D-(1-2i)\big)$

A equação pedida é

$$(D+1)^2(D-(1+2i))(D-(1-2i))y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D+1)^2(D^2-2D+5)y = 0$$

(c) Começamos por notar que se x^2 é solução, então as funções 1 e x também o são, pelo que procuramos uma equação de ordem 3. Podemos considerar a tabela

Base	**Raiz**	**Multiplicidade**	**Termo de** $p(D)$
1, x, x^2	0	3	D^3

pelo que a equação pretendida é

$$D^3 y = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

7. As funções $\operatorname{sen}(ax)$ e $\cos(ax)$ são soluções da equação diferencial $y'' + Ay' + By = 0$ sendo A e B constantes reais. Determine os valores de A e B.

Resolução 1. Se $\operatorname{sen}(ax)$ é solução da equação, então:

$$\Big(\operatorname{sen}(ax)\Big)'' + A\Big(\operatorname{sen}(ax)\Big)' + B\Big(\operatorname{sen}(ax)\Big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-a^2 + B)\operatorname{sen}(ax) + aA\cos(ax) = 0$$

Analogamente $\cos(ax)$ tem de verificar a equação,

$$\Big(\cos(ax)\Big)'' + A\Big(\cos(ax)\Big)' + B\Big(\cos(ax)\Big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-a^2 + B)\cos(ax) - aA\operatorname{sen}(ax) = 0$$

Dado que as funções seno e coseno não são identicamente nulas, as duas igualdades verificam-se para todo $x \in \mathbb{R}$ se e só se

$$-a^2 + B = 0 \qquad \text{e} \qquad A = 0$$

Tem-se então que as funções $\cos(ax)$ e $\operatorname{sen}(ax)$ são soluções da equação

$$y'' + a^2 y = 0$$

Resolução 2. Note que as funções $\operatorname{sen}(ax)$ e $\cos(ax)$ são soluções de uma equação do tipo $y'' + Ay' + By = 0$ desde que o conjunto das raízes do seu polinómio característico,

$$P(r) = r^2 + Ar + B \tag{2}$$

inclua $\pm ia$. Como o polinómio é do segundo grau, essas são as única raízes de $P(r)$, pelo que

$$P(r) = (r - ia)(r + ia) = r^2 + a^2 \tag{3}$$

Comparando (2) com (3) então tem-se, necessariamente, $A = 0$ e $B = a^2$.

8. Considere a seguinte família de equações diferenciais:

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0$$

onde α e β são parâmetros reais.

(a) Poderá alguma das equações diferenciais da família anterior admitir $\{\cos t, e^{2t}\}$ como base do espaço vectorial das suas soluções?

(b) Determine α e β por forma a que $y = e^{2t}$ e $y = te^{2t}$ sejam soluções da equação.

(c) Condsiderando os valores de α e β determinados na alínea anterior, determine a solução geral de $y'' + \alpha y' + \beta y = 1$

Resolução:

(a) Não. Tratando-se de uma equação de segunda ordem, o seu espaço de soluções tem dimensão 2, o que significa que qualquer base do mesmo tem exactamente duas funções linearmente independentes. Porém, se $\cos t$ faz parte dessa base também $\operatorname{sen} t$ deverá fazer, pelo que a referida base teria pelo menos 3 funções. A equação diferencial teria então que ser (pelo menos) de terceira ordem.

(b) Para que e^{2t} e te^{2t} sejam soluções da equação de 2ª ordem $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$, esta terá de ser da forma

$$(D-2)^2 y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D'' - 4D + 4)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' - 4y' + 4y = 0;$$

resulta assim que

$$\alpha = -4 \quad \text{e} \quad \beta = 4.$$

(c) A solução geral da equação é da forma

$$y = y_G + y_P$$

em que y_G é a solução geral da equação homogénea associada e y_P é uma solução particular da equação completa. Pela alínea anterior

$$y_G(t) = ae^{2t} + bte^{2t} \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, queremos calcular uma soluçao particular, y_P, da equação

$$y'' - 4y' + 4y = 1$$

Podemos procurar uma solução particular constante, $y_P(t) \equiv c$, com $c \in \mathbb{R}$, pois as derivadas de uma função constante são a função nula e, assim:

$$y_P'' - 4y_P' + 4y_P = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4y_p = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y_P(t) \equiv \frac{1}{4}$$

Desta forma, a solução geral da equação pretendida é

$$y(t) = y_G(t) + y_P(t) = ae^{2t} + bte^{2t} + \frac{1}{4} \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

9. Sendo $R(x)$ uma função real de variável real contínua e $k \neq 0$, mostre que a função

$$y_p(x) = \frac{1}{k} \int_0^x R(t) \operatorname{sen}\big(k(x-t)\big)\, dt$$

é solução particular de $y'' + k^2 y = R(x)$.

Resolução:

Sendo $a(x)$ e $b(x)$ funções de classe C^1 em $\mathbb{R}$ e $f(t,x)$ contínua e com derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ também contínua (ambas em $\mathbb{R}^2$), a regra de Leibniz garante-nos que:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)\,dt\right) = f\big(b(x),x\big)\,b'(x) - f\big(a(x),x\big)\,a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)\,dt$$

Como estamos nas condições enunciadas — note que $f(t,x) = R(t)\operatorname{sen}\big(k(x-t)\big)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$ e tem derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial x} = kR(t)\cos\big(k(x-t)\big)$$

também contínua (em $\mathbb{R}^2$) — podemos usar a regra de Leibniz para calcular:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k}\int_0^x R(t)\operatorname{sen}\big(k(x-t)\big)\,dt\right) \\ &= \frac{1}{k}R(x)\operatorname{sen}\big(k(x-x)\big) + \int_0^x R(t)\cos\big(k(x-t)\big)\,dt \\ &= \int_0^x R(t)\cos\big(k(x-t)\big)\,dt \end{aligned}$$

Aplicando de novo da regra de Leibniz:

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= \frac{d}{dx}\left(\int_0^x R(t)\cos\big(k(x-t)\big)dt\right)' \\ &= R(x)\cos\big(k(x-x)\big) - k\int_0^x R(t)\operatorname{sen}\big(k(x-t)\big)\,dt \\ &= R(x) - k^2 y_p(x) \end{aligned}$$

Em conclusão:

$$y_p'' + k^2 y_p = R(x) - k^2 y_p(x) + k^2 y_p(x) = R(x).$$

10. Determine a solução geral das seguintes equações

    (a) $y'' - 4y = e^t \operatorname{sen} t$

    (b) $y'' + y = 2e^t + t^2$

    (c) $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3t} + \frac{e^{3t}}{t}$, para $t > 0$.

    (d) $y'' + 4y = \operatorname{sen} 2t$

Resolução:

(a) O polinómio característico da equação homogénea associada,

$$y'' - 4y = 0,$$

é $P(r) = r^2 - 4 = (r-2)(r+2)$, cujas raízes são ± 2 (ambas com multiplicidade 1). Desta forma, a solução geral da equação homogénea é

$$y_G(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}, \qquad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

O polinómio aniquilador de $b(t) = e^t \operatorname{sen} t$ é

$$P_A(D) = \big(D - (1+i)\big)\big(D - (1-i)\big) = (D-1)^2 + 1 = D^2 - 2D + 2.$$

Logo, uma solução da equação não homogénea terá que ser solução da equação diferencial

$$P_A(D)(D-2)(D+2)y = P_A(D)\big(e^t \operatorname{sen} t\big) = 0,$$

ou seja,

$$\big(D - (1+i)\big)\big(D - (1-i)\big)(D-2)(D+2)y = 0.$$

A solução geral desta equação é

$$\begin{aligned} y(t) &= \underbrace{c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}}_{\overset{\shortparallel}{y_G(t)}} + a e^t \cos t + b e^t \operatorname{sen} t \\ &= y_G(t) + a e^t \cos t + b e^t \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

para certos $c_1, c_2, a, b \in \mathbb{R}$. Desta forma, existe uma solução particular da equação

$$y'' - 4y = e^t \operatorname{sen} t \tag{4}$$

da forma $y_p(t) = a\, e^t \cos t + b\, e^t \operatorname{sen} t$. Como

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= (b+a)\, e^t \cos t + (b-a)\, e^t \operatorname{sen} t, \\ y_p''(t) &= 2b\, e^t \cos t - 2a\, e^t \operatorname{sen} t, \end{aligned}$$

substituindo estas expressões na equação (4), obtemos

$$2b\, e^t \cos t - 2a\, e^t \operatorname{sen} t - 4a\, e^t \cos t - 4b\, e^t \operatorname{sen} t = e^t \operatorname{sen} t, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Esta equação é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 2b - 4a = 0 \\ -2a - 4b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{5} \\ a = -\frac{1}{10} \end{cases}$$

Assim $y_p(t) = -\frac{1}{10}\, e^t \cos t - \frac{1}{5}\, e^t \operatorname{sen} t$ é uma solução particular da equação, pelo que a solução geral da equação (8) é

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{10}\, e^t \cos t - \frac{1}{5}\, e^t \operatorname{sen} t, \qquad \text{com} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) O polinómio característico da equação homogénea associada,

$$y'' + y = 0,$$

é $P(r) = r^2 + 1 = (r - i)(r + i)$, cujas raízes são $\pm i$ (ambas com multiplicidade 1). Desta forma, a solução geral da equação homogénea é

$$y_G(t) = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t, \qquad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Como os polinómios aniquiladores de e^t e de t^2 são, respectivamente, $D - 1$ e D^3, então o polinómio aniquilador de $b(t) = 2e^t + t^2$ é

$$P_A(D) = (D - 1)D^3.$$

Logo, uma solução da equação não homogénea terá que ser solução da equação diferencial

$$P_A(D)(D - i)(D + i)y = P_A(D)\big(2e^t + t^2\big) = 0,$$

ou seja,

$$(D - 1)D^3(D - i)(D + i)y = 0.$$

A solução geral desta equação é

$$\begin{aligned} y(t) &= \underbrace{c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t}_{\overset{\shortparallel}{y_G(t)}} + a + bt + ct^2 + de^t \\ &= y_G(t) + a + bt + ct^2 + de^t \end{aligned}$$

para certos $c_1, c_2, a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Desta forma, existe uma solução particular da equação

$$y'' + y = 2e^t + t^2 \tag{5}$$

da forma $y_p(t) = a + bt + ct^2 + de^t$. Como

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= b + 2ct + de^t \\ y_p''(t) &= 2c + de^t \end{aligned}$$

substituindo estas expressões na equação (5), obtemos

$$2c + de^t + a + bt + ct^2 + de^t = t^2 + 2e^t, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Esta equação é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ 2d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases}$$

Assim $y_p(t) = -2 + t^2 + e^t$ é uma solução particular da equação, pelo que a solução geral da equação (8) é

$$y(t) = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \operatorname{sen} t - 2 + t^2 + e^t, \qquad \text{com} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) O polinómio característico da equação homogénea associada,

$$y'' - 6y' + 9y = 0,$$

é $P(r) = r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2$, que tem uma única raiz, $r = 3$, com multiplicidade 2. Desta forma, a solução geral da equação homogénea é

$$y_G(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}, \qquad \text{com } \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dado que $\frac{e^{3t}}{t}$ não é combinação linear de funções que sejam soluções de equações lineares homogéneas, vamos usar a fórmula da variação das constantes para determinar uma solução particular de

$$y'' - 6y' + 9y = 4e^{3t} + \frac{1}{t}e^{3t} \tag{6}$$

Para esta equação, a matriz wronskiana é

$$W(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & (1+3t)e^{3t} \end{bmatrix} = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 3 & 1+3t \end{bmatrix}$$

e a sua inversa é, então, relativamente fácil de calcular:

$$W^{-1}(t) = e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 3 & 1+3t \end{bmatrix}^{-1} = e^{-3t} \begin{bmatrix} 1+3t & -t \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando a fórmula da variação das constantes:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \end{bmatrix} \int W^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 4e^{3t} + \frac{1}{t}e^{3t} \end{bmatrix} dt \\ &= e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \int e^{-3t} \begin{bmatrix} 1+3t & -t \\ -3 & 1 \end{bmatrix} e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 + \frac{1}{t} \end{bmatrix} dt \\ &= e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} -4t - 1 \\ 4 + \frac{1}{t} \end{bmatrix} dt \\ &= e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2t^2 - t \\ 4t + \log t \end{bmatrix} \\ &= e^{3t}\big(-2t^2 - t + 4t^2 + t\log t \big) \;=\; \big(2t^2 + t\log t\big)e^{3t} - te^{3t} \end{aligned}$$

A solução geral da equação (6) é, então (para $t > 0$):

$$y(t) = y_G(t) + y_p(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + \big(2t^2 + t\log t\big)e^{3t}, \qquad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Note que o termo $-te^{3t}$ da solução particular pode, obviamente, ser absorvido pelo termo c_2te^{3t} de $y_G(t)$.

(d) O polinómio característico da equação homogénea associada,

$$y'' + 4y = 0,$$

é $P(r) = r^2 + 4 = (r - 2i)(r + 2i)$, cujas raízes são $\pm 2i$ (ambas com multiplicidade 1). Desta forma, a solução geral da equação homogénea é

$$y_G(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t, \qquad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

O polinómio aniquilador de $b(t) = \operatorname{sen} 2t$ é

$$P_A(D) = (D - 2i)(D + 2i)$$

Logo, uma solução da equação não homogénea terá que ser solução da equação diferencial

$$P_A(D)(D - 2i)(D + 2i)y = P_A(D) \operatorname{sen} 2t = 0,$$

ou seja,

$$(D - 2i)^2 (D + 2i)^2 y = 0.$$

Como várias raízes do polinómio característico da equação homogénea (neste caso, todas) coincidem com raízes do polinómio aniquilador, trata-se de uma **equação diferencial linear com ressonância**.

A solução geral da equação anterior é

$$\begin{aligned} y(t) &= \underbrace{c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t}_{\overset{\shortparallel}{y_G(t)}} + at \cos 2t + bt \operatorname{sen} 2t \\ &= y_G(t) + at \cos 2t + bt \operatorname{sen} 2t \end{aligned}$$

para certos $c_1, c_2, a, b \in \mathbb{R}$. Desta forma, existe uma solução particular da equação

$$y'' + 4y = \operatorname{sen} 2t \tag{7}$$

da forma $y_p(t) = at \cos 2t + bt \operatorname{sen} 2t$. Como

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= (a + 2bt) \cos 2t + (b - 2at) \operatorname{sen} 2t, \\ y_p''(t) &= 4(b - at) \cos 2t + 4(-a - bt) \operatorname{sen} 2t, \end{aligned}$$

substituindo estas expressões na equação (7), obtemos

$$4b \cos 2t - 4a \operatorname{sen} 2t = \operatorname{sen} 2t, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Esta equação é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 4b = 0 \\ -4a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Assim $y_p(t) = -\frac{1}{4}\, t \operatorname{sen} 2t$ é uma solução particular da equação, pelo que a solução geral da equação (7) é

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{4}\, t \operatorname{sen} 2t, \qquad \text{com} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Comparando as soluções da equação homogénea com as da não homogénea, vê-se que o efeito da ressonância (provocada pelo termo não homogéneo, $b(t) = \operatorname{sen} 2t$) é o aparecimento de oscilações de amplitude crescente, na solução.

11. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 8t + 2e^{2t} \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

(a) Escreva e resolva a equação homogénea associada.

(b) Determine uma solução particular da equação diferencial.

(c) Resolva o problema de valor inicial.

(Problema do 2º Teste ACED 2017/18, 1º Semestre).

Resolução:

(a) A equação homogénea associada é

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

O seu polinómio característico, $P(R) = R^2 - 4R + 4 = (R-2)^2$, tem uma única raiz, $R = 2$, com multiplicidade 2. Desta forma, a solução geral da equação homogénea é

$$y_G(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t},$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) O aniquilador de $b(t) = 8t + 2e^{2t}$ é

$$P_A(D) = D^2(D-2)$$

Logo, uma solução da equação não homogénea terá que ser solução da equação diferencial

$$P_A(D)(D-2)^2 y = P_A(D)\big(8t + 2e^{2t}\big) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad D^2(D-2)^3 y = 0$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + c_3 t^2 e^{2t} + c_4 + c_5 t \\ &= y_G(t) + c_3 t^2 e^{2t} + c_4 + c_5 t \end{aligned}$$

para certos $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$. Desta forma, existe uma solução particular da equação

$$(D-2)^2 y = 8t + 2e^{2t} \tag{8}$$

da forma $y_p(t) = c_3 t^2 e^{2t} + c_4 + c_5 t$. Substituindo esta expressão na equação (8), obtemos

$$2c_3 e^{2t} + 4c_4 - 4c_5 + 4c_5 t = 8t + 2e^{2t}, \qquad \text{para qualquer } \ t \in \mathbb{R},$$

o que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 2c_3 = 2 \\ 4c_4 - 4c_5 = 0 \\ 4c_5 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 = 1 \\ c_4 = 2 \\ c_5 = 2 \end{cases}$$

Assim $y_p(t) = t^2 e^{2t} + 2 + 2t$ é uma solução particular da equação, pelo que a solução geral da equação (8) é

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + t^2 e^{2t} + 2 + 2t, \qquad \text{com} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Como $y'(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2(1+2t)e^{2t} + (2t+2t^2)e^{2t} + 2$, resulta das condições iniciais que:

$$\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 + 2 \\ 2 = y'(0) = 2c_1 + c_2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Assim, a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = (-1 + 2t + t^2)e^{2t} + 2 + 2t.$$

12. Determine a solução da equação diferencial

$$y'' - 4y' + 3y = (1 + e^{-x})^{-1}$$

que verifica as condições iniciais $y(0) = y'(0) = 1$

Resolução:

A solução da equação é da forma

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x)$$

sendo y_g a solução geral da equação homogénea associada e y_p uma solução particular da equação completa. Começemos por calcular y_g. As raízes do polinómio característico associado são

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \ \Leftrightarrow \ r = 1 \text{ ou } r = 3$$

Sendo assim, e^x e e^{3x} são duas soluções linearmente independentes da equação homogénea, pelo que

$$y_g(t) = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$$

Para calcular y_p, note que somos forçados a utilizar a fórmula da variação das constantes, pois o termo não homogéneo,

$$h(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{1+e^{-x}}$$

não é solução de qualquer equação diferencial linear de coeficientes constantes. Assim sendo,

$$y_p(x) = \begin{bmatrix} e^x & e^{3x} \end{bmatrix} \int^x W^{-1}(s) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^{-s}} \end{bmatrix} ds$$

em que $W(x)$ é a matriz Wronskiana associada:

$$W(x) = \begin{bmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= \begin{bmatrix} e^x & e^{3x} \end{bmatrix} \int^x \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-s} & -e^{-s} \\ -e^{-3s} & e^{-3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^{-s}} \end{bmatrix} ds \\
&= \begin{bmatrix} e^x & e^{3x} \end{bmatrix} \int^x \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{e^{-s}}{1+e^{-s}} \\ \frac{e^{-3s}}{1+e^{-s}} \end{bmatrix} ds \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^x & e^{3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log(1+e^{-x}) \\ -\frac{e^{-2x}}{2} + e^{-x} - \log(1+e^{-x}) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \left(e^x \log(1+e^{-x}) - \frac{e^x}{2} + e^{2x} - e^{3x} \log(1+e^{-x}) \right) \\
&= \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^x}{4} + \frac{e^x - e^{3x}}{2} \log(1+e^{-x})
\end{aligned}$$

onde calculámos a primitiva de $\frac{e^{-3s}}{1+e^{-s}}$ fazendo a substituição $e^{-s} = t$. Assim sendo, a solução geral da equação é:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + \underbrace{\left(\tilde{c}_2 - \tfrac{1}{4}\right)}_{\overset{\shortparallel}{c_2}} e^{3x} + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^x - e^{3x}}{2} \log(1+e^{-x})$$

Dado que $y(0) = y'(0) = 1$, tem-se que

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = 1 \\ c_1 + 3c_2 + 1 - \log 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{1}{2} \\ c_1 + 3c_2 = \log 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\log 2 \\ c_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log 2 \end{cases}$$

pelo que

$$y(x) = \frac{3e^x - e^{3x}}{4} + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^x - e^{3x}}{2} \log\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right)$$

13. Considere a equação diferencial linear não homogénea de coeficientes não constantes:

$$y''' - \frac{3}{x}y'' = \frac{20}{x^2} \tag{9}$$

onde a solução, $y(x)$, está definida no intervalo $I =]0, \infty[$.

(a) Determine a solução geral da equação homogénea.

(b) Determine a solução geral da equação (9).

Resolução:

(a) A equação homogénea associada a (9) é

$$y''' - \frac{3}{x}y'' = 0.$$

Fazendo a substituição $z = y''$ obtém-se a equação linear homogénea de 1ª ordem

$$z' - \frac{3}{x}z = 0,$$

cuja solução geral é dada por

$$z(x) = Ke^{\int \frac{3}{x}dx} = Ke^{3\log x} = Kx^3, \qquad \text{com } K \in \mathbb{R},$$

para $x > 0$. Resolvendo agora a equação diferencial

$$y'' = z(x) = Kx^3$$

(basta primitivar duas vezes) obtém-se

$$y(x) = a + bx + \frac{K}{20}x^5 = a + bx + cx^5 \qquad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

(b) A solução geral da equação é da forma

$$y(x) = a + bx + cx^5 + y_p(x)$$

em que $y_p(x)$ é uma solução particular da equação. Pela fórmula de variação das constantes

$$y_p(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^5 \end{bmatrix} \int W^{-1}(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{20}{x^2} \end{bmatrix} dx$$

em que a $W(x)$ é a matriz wronskiana associada à equação:

$$W(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^5 \\ 0 & 1 & 5x^4 \\ 0 & 0 & 20x^3 \end{bmatrix}$$

Então

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= \begin{bmatrix} 1 & x & x^5 \end{bmatrix} \int \frac{1}{20x^3} \begin{bmatrix} 20x^3 & -20x^4 & 4x^5 \\ 0 & 20x^3 & -5x^4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{20}{x^2} \end{bmatrix} dx \\
&= \begin{bmatrix} 1 & x & x^5 \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{5}{x} \\ \frac{1}{x^5} \end{bmatrix} dx \\
&= \begin{bmatrix} 1 & x & x^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4x \\ -5\log x \\ -\frac{1}{5x^4} \end{bmatrix} = \frac{19}{5}x - 5x\log x
\end{aligned}$$

Finalmente, a solução geral da equação é

$$y(x) = a + \underbrace{\left(\tilde{b} - \tfrac{19}{5}\right)}_{\overset{\shortparallel}{b}} x + cx^5 - 5x\log x, = a + bx + cx^5 + 5x\log x, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

14. Considere a equação

$$y'' + \left(t - \frac{3}{t}\right)y' - 2y = 0 \quad , \quad t > 0$$

e duas soluções $y_1(t) = e^{-t^2/2}$ e $y_2(t) = t^2 - 2$

(a) Prove que y_1 e y_2 são linearmente independentes.

(b) Encontre uma solução particular de

$$y'' + \left(t - \frac{3}{t}\right)y' - 2y = t^4$$

Resolução:

(a) Se as duas soluções fossem linearmente dependentes em $\mathbb{R}^+$ então o determinante da matriz wronskiana teria que ser igual a zero para todo o $t \in \mathbb{R}^+$. Ora

$$\begin{vmatrix} e^{-t^2/2} & t^2 - 2 \\ -te^{-t^2/2} & 2t \end{vmatrix} = t^3 e^{-t^2/2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0$$

Resulta assim que y_1 e y_2 são linearmente independentes em $\mathbb{R}^+$.

(b) Pela fórmula da variação das constantes

$$y_p(t) = \begin{bmatrix} e^{-t^2/2} & t^2 - 2 \end{bmatrix} \int W^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ t^4 \end{bmatrix} dt$$

em que a $W(x)$ é a matriz wronskiana escrita na alínea anterior. Então

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= \begin{bmatrix} e^{-t^2/2} & t^2-2 \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} \frac{2}{t^2}e^{t^2/2} & \frac{2-t^2}{t^3}e^{t^2/2} \\ \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t^4 \end{bmatrix} dt \\
&= \begin{bmatrix} e^{-t^2/2} & t^2-2 \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} (2t-t^3)e^{t^2/2} \\ t \end{bmatrix} dt \\
&= \begin{bmatrix} e^{-t^2/2} & t^2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (4-t^2)e^{t^2/2} \\ \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} = 4-t^2+(t^2-2)\frac{t^2}{2} \\
&= 4-2t^2+\frac{t^4}{2}
\end{aligned}$$

Tendo em conta que $4-2t^2 = -2(t^2-2)$ é solução da equação homogénea, então uma solução particular mais simples é:

$$\tilde{y}_p(t) = \frac{t^4}{2}.$$

2 Exercícios Propostos

1. Determine a solução geral de cada uma das equações:

(a) $y^{(3)} - 2y^{(2)} = 0$ (b) $y'' - 6y' + 8y = 0$ (c) $y'' + 8y' + 41y = 0$

(d) $(D+2)^2(D^2-2D+5)^3(D-1)y = 0$ (e) $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$

(f) $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y^{(3)} - y'' = 0$ (g) $4y'' - 20y' + 25y = 0$

2. Resolva os problemas de valor inicial:

(a) $y''' - y'' + y' - y = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = -y''(0) = 1$

(b) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = 1$ e $y''(0) = 4$

(c) $y''' - 7y' + 6y = 0$ verificando $y(0) = 1$ e $y'(0) = y''(0) = 0$

(d) $y^{(3)} + 4y'' - 5y' = 0$ verificando $y(0) = 4$, $y'(0) = -7$ e $y''(0) = 23$

(e) $y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = 0$ verificando $y(0) = 7$, $y(0)' = -7$, $y''(0) = 11$

(f) $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$ verificando
$y^{(n-1)}(0) = y^{(n-2)}(0) = \cdots = y'(0) = y(0) = 0$ para quaisquer $a_i \in \mathbb{R}$.

3. Seja m um número real estritamente positivo. Obtenha a solução do (PVI)

$$y''' - 3my'' + 3m^2y' - m^3y = 0 \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0 \;\; , \;\; y''(0) = 1$$

4. Considere a equação diferencial

$$y''' + a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$$

onde a_0, a_1 e a_2 são constantes reais. Sabe-se que duas soluções linearmente independentes desta equação são dadas por $y_1(x) = xe^{-x}$ e $y_2(x) = e^{2x}$.

(a) Encontre uma terceira solução linearmente independente.

(b) Determine a_0, a_1 e a_2 com as propriedades acima descritas.

5. Seja $f_b(t)$ a solução da equação

$$y'' + 2by' + y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \;\; , \;\; y'(0) = 1.$$

(a) Obtenha f_b para cada $b \in \mathbb{R}$.

(b) Encontre todos os valores de b tais que $\lim_{t\to\infty} f_b(t) = 0$

(b) Encontre todos os valores de b para os quais existe $t^* > 0$ com $f_b(t^*) = 0$.

6. Considere a equação

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + 2y'' + 2y' + y = 0 \tag{10}$$

(a) Mostre que $y(t) = te^{-t}$ é uma solução particular de (10).

(b) Determine a solução geral de (10).

(c) Determine para que condições iniciais em $t = 0$ é que os problemas de valor inicial correspondentes têm soluções limitadas em $]-\infty, 0]$.

(d) Determine para que condições iniciais em $t = 0$ é que os problemas de valor inicial correspondentes têm soluções convergentes quando $t \to \infty$.

7. Obtenha as equações lineares homogénas de coeficientes constantes, de menor ordem possível, cujo coeficiente da derivada de maior ordem é igual a 1 e que têm as funções abaixo como solução:

(a) e^x, e^{-x}, e^{2x}, e^{-2x}.

(b) $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$

(c) 1, x, e^x;

8. Escreva um problema de valor inicial correspondente a uma equação diferencial linear homogénea de terceira ordem cuja solução é

$$y(t) = e^t - 2e^{-2t} + 5te^{-2t}$$

9. Determine a solução geral de cada uma das equações:

(a) $\quad y'' - 2y' - 3y = \cos t \quad$ (b) $\quad y'' - 2y' + y = te^t$

(c) $\quad y^{(4)} + y = t + e^{2t}\,\mathrm{sen}\, t \quad$ (d) $\quad y^{(3)} - 2y^{(2)} = t$

(e) $\quad y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t} \quad$ (f) $\quad y'' + 3y' + 2y = \mathrm{sen}(e^t)$

10. Determine a solução do problema de valor inicial

$$y^{(3)} + 2y^{(2)} + y' - 3 = b(t) \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad , \quad y^{(2)}(0) = 1$$

quando:

(a) $\quad b(t) = 0 \quad$ (b) $\quad b(t) = t \quad$ (c) $\quad b(t) = e^{-t}$

11. Determine a solução da equação diferencial

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\cos x}$$

que verifica as condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$

12. Considere a equação

$$y^{(4)} - 3y^{(3)} + 2y^{(2)} = t + \mathrm{sen}\, t \tag{11}$$

(a) Determine a solução geral da equação homogénea correspondente a (11).

(b) Determine uma solução particular de (11).

(c) Determine a solução de (11) que verifica a condição inicial

$$y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = 0$$

13. Considere a equação que descreve um sistema mola-amortecedor:

$$y'' + 2by' + ky = F(t)\ , \tag{12}$$

onde $2b > 0$ é o coeficiente de atrito do amortecedor, $k > 0$ é o coeficiente de elasticidade da mola e a função contínua $F(t)$ representa a força exterior aplicada ao sistema. Seja $\omega_0 = \sqrt{|b^2 - k|}$.

(a) Escreva a solução geral da equação homogénea associada a (12). Será conveniente escrevê-la em função dos parâmetros b e ω_0.

(b) Escreva uma equação vectorial da forma $\dot{\mathbf{Y}} = A\mathbf{Y} + \mathbf{h}(t)$ que seja equivalente a (12). Verifique que os valores próprios da matriz A são as raízes do polinómio característico da equação homogénea associada a (12).

(c) Resolva a equação não homogénea no caso $b = 0$ e $F(t) = F_0 \operatorname{sen}(\omega t)$, onde $F_0 > 0$ (oscilações forçadas). Será conveniente tratar separadamente os casos $\omega \neq \omega_0$ (sem ressonância) e $\omega = \omega_0$ (com ressonância).

14. Considere a equação diferencial

$$y'' + \frac{t}{1-t}y' + \frac{1}{t-1}y = 1 - \frac{1}{t}$$

(a) Determine soluções da equação homogénea associada da forma $y(t) = t^k$ e da forma $y(t) = e^{\lambda t}$, e aproveite os resultados para escrever a solução geral da equação homogénea.

(b) Calcule a solução da equação que verifica as condições iniciais $y(2) = 1$ e $y'(2) = -1$.

Soluções

1. (a) $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{2t}$ com $c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R}$ (b) $y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{2x}$
(c) $y(x) = e^{-4x}(c_1 \cos(5x) + c_2 \operatorname{sen}(5x))$
(d) $y(t) = (A + Bt)e^{-2t} + (C + Dt + Et^2)e^t \cos 2t + +(F + Gt + Ht^2)e^t \operatorname{sen} 2t + Ie^t$ com $A, B, C, D, E, F, G, H, I \in \mathbb{R}$
(e) $y(t) = c_1 \cos t + c_2 t \cos t + c_3 \operatorname{sen} t + c_4 t \operatorname{sen} t$ com $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$
(f) $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 te^t + c_5 t^2 e^t$ (g) $y(t) = (c + c_2 t)e^{5t/2}$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2. (a) $y(t) = \cos t + \operatorname{sen} t$ (b) $y(t) = 4e^t - 3e^{2t} + 3te^{2t}$ (c) $y(t) = \frac{1}{10}\Big(15e^t - 6e^{2t} + e^{-3t}\Big)$
(d) $y(t) = 5 - 2e^t + e^{-5t}$ (e) $y(t) = 7e^{-t} + 2t^2 e^{-t}$ (f) $y(t) = 0$

3. $y(x) = \frac{1}{2} t^2 e^{mx}$

4. (b) $a_0 = 0$, $a_1 = -3$ e $a_2 = -2$

5. (a)

$$f_b(t) = \begin{cases} te^{-bt} & \text{se} \quad b = \pm 1 \\ \frac{1}{\omega} e^{-bt} \operatorname{sh}(\omega t) & \text{se} \quad |b| > 1 \\ \frac{1}{\omega} e^{-bt} \operatorname{sen}(\omega t) & \text{se} \quad |b| < 1 \end{cases}$$

em que $\omega = \sqrt{|b^2 - 1|}$
(b) $b > 0$ (c) $|b| < 1$

6. (c) $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \beta$, $y''(0) = -\alpha$ e $y'''(0) = -\beta$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.
(d) $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \beta$, $y''(0) = -2\beta$ e $y'''(0) = 3\beta + 2\alpha$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

7. (a) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$ (b) $y^{(4)} - y = 0$ (c) $y''' - y'' = 0$

8. $y^{(3)} + 3y'' - 4y = 0$ com $y(0) = -1$, $y'(0) = 10$ e $y''(0) = -27$

9. (a) $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{10}\Big(\operatorname{sen} t + 2\cos t\Big)$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
(b) $y(t) = \Big(c_1 + c_2 t + \frac{t^3}{6}\Big)e^t$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
(c) $y(t) = \cos(\sqrt{2}t/2)\Big(c_1 e^{\sqrt{2}t/2} + c_2 e^{-\sqrt{2}t/2}\Big) + \operatorname{sen}(\sqrt{2}t/2)\Big(c_3 e^{\sqrt{2}t/2} + c_4 e^{-\sqrt{2}t/2}\Big) + t - \frac{e^{2t}}{102}\Big(\operatorname{sen} t + 4\cos t\Big)$ com $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.
(d) $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{2t} - \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{12}t^3$ com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$
(e) $y(t) = c_1 e^t + c_2 te^t + e^t\Big(t \log t - t\Big)$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
(f) $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} - e^{-2t} \operatorname{sen}(e^t)$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

10. (a) $y(t) = -5 + 5e^{-t} + 2te^{-t} + 3t$ (b) $y(t) = -2 + 2e^{-t} + te^{-t} + \frac{t^2}{2} + t$
(c) $y(t) = -4 + 4e^{-t} + te^{-t} + 3t - \frac{t^2 e^{-t}}{2}$

11. $y(x) = e^x\Big(\cos x - \operatorname{sen} x + \cos x \log(\cos x) + x \operatorname{sen} x\Big)$

12. (a) $y_H(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^{2t}$, com c_1, c_2, c_3 e $c_4 \in \mathbb{R}$

(b) $y_p(t) = \frac{3t^2}{8} + \frac{t^3}{12} - \frac{\operatorname{sen} t + 3\cos t}{10}$

(c) $y(t) = \frac{27}{16} + \frac{11t}{8} - \frac{3}{2}e^t + \frac{9}{80}e^{2t} + \frac{3t^2}{8} + \frac{t^3}{12} - \frac{\operatorname{sen} t + 3\cos t}{10}$

13. (a)$y_H(t) = \begin{cases} e^{-bt}(c_1 e^{\omega_0 t} + c_2 e^{-\omega_0 t}) & \text{se} \quad b^2 > k \\ e^{-bt}(c_1 + c_2 t) & \text{se} \quad b^2 = k \\ e^{-bt}(c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t)) & \text{se} \quad b^2 < k \end{cases}$

(b) $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -2b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix}$

(c) $y(t) = \begin{cases} c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\operatorname{sen}(\omega t) & \text{se} \quad \omega \neq \omega_0 \\ \\ c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) - \frac{F_0}{2\omega_0} t \cos(\omega_0 t) & \text{se} \quad \omega = \omega_0 \end{cases}$

14. (a) $\lambda = k = 1$; $y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t$ (b) $y(t) = (2 + \log 2)t - 2e^{t-2} - 1 - t\log t$