Capítulo 5

Determinantes

5.1 Encontrar o número mínimo de trocas de posição em cada uma das seguintes permutações do conjunto $\{1,2,3,4,5\}$.

a) (34152) b) (42531) c) (54321) d) (12345) e) (13542) f) (23541)

b) Classificar as permutações acima como pares ou ímpares.

5.2 Calcular os determinantes:

$$\text{a) }\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}\quad \text{b) }\begin{vmatrix}6 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}\quad \text{c) }\begin{vmatrix}-1 & -8\\ 7 & -3\end{vmatrix}\quad \text{d) }\begin{vmatrix}k-1 & 2\\ 4 & k-3\end{vmatrix}\text{ em que k é um real}$$

$$\text{e) }\begin{vmatrix}1 & -2 & 7\\ 3 & 5 & 1\\ 4 & 3 & 8\end{vmatrix}\quad \text{f) }\begin{vmatrix}8 & 2 & -1\\ -3 & 4 & -6\\ 1 & 7 & 2\end{vmatrix}\quad \text{g) }\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 4 & 0 & -1\\ 2 & 8 & 6\end{vmatrix}\quad \text{h) }\begin{vmatrix}k & -3 & 9\\ 2 & 4 & k+1\\ 1 & k^2 & 3\end{vmatrix}$$

5.3 Calcular os valores de λ para os quais $\det(A)=0$

$$\text{a) } A=\begin{bmatrix}\lambda-1 & -2\\ 1 & \lambda-4\end{bmatrix}\quad \text{b) }\begin{bmatrix}\lambda-6 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & 4 & \lambda-4\end{bmatrix}$$

5.4 Calcular

$$\text{a) }\begin{vmatrix}1 & 4 & -3 & 1\\ 2 & 0 & 6 & 3\\ 4 & -1 & 2 & 5\\ 1 & 0 & -2 & 4\end{vmatrix}\quad \text{b) }\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}\quad \text{c) }\begin{vmatrix}0 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

5.5 Demonstre que uma matriz quadrada com linhas linearmente dependentes tem determinante nulo.

5.6 Calcule os determinantes:

$$\text{a) }\begin{vmatrix}2 & -40 & 17\\ 0 & 1 & 11\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}\quad \text{b) }\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -100 & -1 & 0 & 0\\ 5 & 8 & 1 & 0\\ 17 & 23 & 7 & 2\end{vmatrix}\quad \text{c) }\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 7 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}\quad \text{d) }\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 6 & -2 & 4\\ 1 & 7 & 3\end{vmatrix}$$

5.7 Calcule os determinantes por eliminação de Gauss:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

5.8 Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcular:

a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$

5.9 Mostre que:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31}$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

5.10 Explique, sem fazer cálculos, que:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 7 & -2 \\ 2 & 6 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

5.11 Quais das seguintes matrizes são singulares:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

5.12 Sabendo que $\det(A)=3$ e que $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, determine

a) $\det(3A)$ b) $\det(6A^{-1})$ c) $\det((3A)^{-1})$ d) $\begin{vmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{vmatrix}$

5.13 Sem calcular explicitamente o determinante, prove que para $x=0$ e $x=2$ se tem:

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

5.14 Prove que:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

5.15 Prove:

a) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a_1+b_1t & a_2+b_2t & a_3+b_3t \\ a_1t+b_1 & a_2t+b_2 & a_3t+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (1-t^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

5.16 Para que valores de k, A é singular:

a) $A=\begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$

5.17 Mostre que $\begin{bmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ não é invertível, para quaisquer valores de α,β e γ.

5.18 Exprimir $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 & e_1+f_1 \\ a_2+b_2 & c_2+d_2 & e_2+f_2 \\ a_3+b_3 & c_3+d_3 & e_3+f_3 \end{vmatrix}$ como a soma de oito determinantes em que nenhuma entrada contem adições.

5.19 Encontrar todos os menores e todos os cofactores da matrizes seguintes:

$$\text{a) } A=\begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{b) } A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 14 & 2 \end{bmatrix}$$

5.20 a) Calcular os determinantes das matrizes do problema anterior usando a regra de Laplace.

b) Obter as matrizes dos cofactores para cada uma das matrizes do problema anterior.

c) Obter as inversas das matrizes do problema anterior, usando a matriz dos cofactores.

5.21 Calcular determinantes utilizando a regra de Laplace:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 8 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & k \\ k^2 & k^2 & k^2 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} k-1 & 2 & 3 \\ 2 & k-3 & 4 \\ 3 & 4 & k-4 \end{vmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ 6 & 14 & 3 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{f) } \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 9 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

5.22 Encontrar a inversa de A em cada uma das alíneas, (pelo método da matriz dos cofactores):

$$\text{a) } A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{b) } A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{c) } A=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{d) } A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

5.23 Usar a regra de Cramer para resolver:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x-4y=-5 \\ 2x+y=4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x+5y=2 \\ 11x+y+2z=3 \\ x+5y+2z=1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x-2y-4z=-4 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x-3y+z=4 \\ 2x-y=-2 \\ 4x-3z=0 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} 2x-y+z-4t=-32 \\ 7x+2y+9z-t=14 \\ 3x-y+z+t=11 \\ x+y-4z-2t=-4 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} 2x-y+z=8 \\ 4x+3y+z=7 \\ 6x+2y+2z=15 \end{cases}$$

5.24 Demonstrar:

a) A equação da recta que passa pelos pontos (a_1,b_1) e (a_2,b_2) pode ser escrita:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

b) A equação do plano que passa pelos pontos $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$ e (a_3, b_3, c_3), não colineares, pode ser escrita:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

5.25 Mostre que a equação cartesiana do plano definido em R^3 pelos pontos $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$ e (a_3, b_3, c_3) se pode escrever na forma:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ x-a_2 & y-b_2 & z-c_2 \\ x-a_3 & y-b_3 & z-c_3 \end{vmatrix} = 0$$

(Exames)

5.26 Sabendo que os valores reais γ e δ são tais que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \gamma \\ \delta & 1 & 1 \\ 1 & \gamma+\delta & 2 \end{vmatrix} = 1$$

calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \gamma \\ \delta & \delta\gamma+\delta^2 & 2\delta \\ \delta\gamma & \gamma & \gamma \end{vmatrix}$$

(Exames)

5.27 Mostre que o determinante da matriz seguinte é igual a λ^6:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda+1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & 3 & 3 & 3 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & 4 & 4 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & 5 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & \lambda+5 \end{bmatrix}$$

(Exames)

5.28 a) Determine em R as raízes da equação seguinte, sem desenvolver o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & 2 & -2 \\ x^2 & 1 & 4 & 4 \\ x^3 & -1 & 8 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

b) Calcule o determinante seguinte onde a,b,c e x são números reais:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

(Exames)

5.29 Calcule o determinante da matriz B

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda \\ 1 & \lambda+1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \lambda+1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

(Exames)

5.30 Seja V o espaço linear das funções reais de variável real. Se f, g e h são vectores de V duplamente diferenciáveis então a função $W(x)$ definida por:

$$W(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix}$$

é o Wronskiano de f, g e h.

a) Demonstre que: f, g e h formam um conjunto linearmente dependente se $W(x) \equiv 0$.

b) Utilizando o resultado precedente indique quais dos seguintes conjuntos de vectores são linearmente independentes em V:

i) $\{1, x, e^x\}$ ii) $\{\sin x, \cos x, x \sin x\}$ iii) $\{e^x, xe^x, x^2 e^x\}$.