Nota explicativa

Agradeço aos professores João Alves, José Luís Fachada, Amarino Lebre, Roger Picken e Pedro Santos, que me facultaram amavelmente exercícios da sua autoria e recolhas de exames da cadeira.

Brevemente (ainda este ano) serão acrescentadas soluções para alguns problemas e mais exercícios.

Note-se que nos capítulos mais avançados se encontram exercícios com partes relativas à matéria anterior. Isto deve-se ao facto (natural) da matéria evoluir de forma construtiva, muitos exercícios cobrem diversos aspectos resultando mais interessantes e completos (os exercícios de exame incluem-se geralmente nesta categoria).

Os exercícios marcados com um asterisco necessitam de conhecimentos, aliás rudimentares, de cálculo integral. Os capítulos foram organizados de acordo com os diversos tópicos da disciplina de Álgebra Linear dada ao primeiro ano dos cursos do IST.

Capítulo 1

Matrizes

Resolução de sistemas de equações lineares por eliminação Gauss e Gauss-Jordan

1.1 Resolver pelo método de eliminação de Gauss os seguintes sistemas:

$$\text{a)}\begin{cases} 2x+8y+6z=20 \\ 4x+2y-2z=-2 \\ 3x-y+z=11 \end{cases};\quad \text{b)}\begin{cases} 2x+8y+6z=20 \\ 4x+2y-2z=-2 \\ -6x+4y+10z=24 \end{cases};$$

$$\text{c)}\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2+x_3=1 \\ -2x_1+3x_2-2x_3+x_4=-6 \\ -x_1+2x_2-3x_3+x_4=-5 \end{cases};\quad \text{d)}\begin{cases} 2x_1-5x_2+4x_3+x_4-x_5=-3 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1 \\ x_1-4x_2+6x_3+2x_4-x_5=6 \end{cases};$$

$$\text{e)}\begin{cases} 2x-5y+4z=-3 \\ x-2y+2z=5 \\ x-4y+5z=10 \end{cases}.$$

1.2 Calcule os produtos AB e BA, sempre que possível

$$a)\ A=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix};$$

$$b)\ A=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

1.3 Determinar AB - BA

$$a)\ A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ -4 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\ ;$$

$$b)\ A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}3 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 4\\ -3 & 5 & 11\end{bmatrix}\ ;$$

1.4 Seja $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Obter uma fórmula para A^n.

1.5 Seja $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -sen\theta\\ sen\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$. Obter uma fórmula para A^n.

1.6 Seja $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Mostre que $A^2=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ e determine uma expressão geral para A^n por indução.

1.7 Aplique a eliminação de Gauss para decompor A=LU para

a) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$; b) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$; c) $A=\begin{bmatrix}5 & 3 & 0\\ 7 & 9 & 2\\ -2 & -8 & -1\end{bmatrix}$; d) $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}$.

1.8 Com as matrizes A da alínea c) e d) resolver para x a equação:

$$Ax=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}.$$

1.9 Calcular as matrizes inversas (se possível) de

a) $\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 5 & -4\\ 1 & -4 & 6\end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{bmatrix}$ .nota-

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1.10 Utilizando o método de Gauss-Jordan determine a inversa de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$; com a,b,c e d reais; determine a relação a que os parâmetros têm de obedecer para a matriz ser não singular.

1.11 Discuta em função dos parâmetros os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 4y + 3z = 10 \\ 2x + 7y - 2z = 10 \\ x + 5y + \alpha z = \beta \end{cases}$ (Fachada) ; b) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 2 \\ 2y + \quad 6t = 2 \\ \alpha y + \quad 3t = 1 \\ 5y + z - \ t = 2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x + y + \quad z = -6\beta \\ \alpha x + 3y + \quad 2z = 2\beta \\ 2x + y + (\alpha + 1)\, z = 4 \end{cases}$ (Fachada).

1.12 Dada a matriz dos coeficientes do sistema $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, diga para que valores de $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, o sistema $Ax = b$ tem solução.

1.13 Tentar resolver a seguinte equação matricial:

1. $Ax - xB = C$, para os seguintes casos

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. Tentar resolver a seguinte equação matricial:

$AxB - x = C$, para os seguintes casos:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, neste caso discutir a solução em função dos parâmetros a e b.

1.14 Tentar resolver a seguinte equação matricial:

$Ax = b$, para os seguintes casos:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ c \end{bmatrix}$, neste caso discutir a solução em função dos parâmetros a e b.

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

1.15 Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$x + 3y + z = b$$
$$2x + ax + 3z = 1$$
$$4x + 2y = 0$$

onde a e b são coeficientes escalares.

1) Discuta o sistema em função dos coeficientes a e b.

2) Decomponha a matriz dos coeficientes A, para $a = 6$, na forma $PA = LDU$

3) Calcule a inversa da matriz dos coeficientes do sistema, para o caso $a = 6$. Utilize o resultado para resolver o sistema no caso $a = 6$ e $b = 0$.

Capítulo 2

Espaços lineares

2.1 Quais dos ternos seguintes (A,+, .) são espaços lineares (A representa um conjunto + e . representam as operações adição de vectores e multiplicação de escalares por vectores). Se não forem espaços lineares indicar os axiomas violados.

a) O conjuntos de ternos ordenados (*x*,*y*,*z*) de reais com as operações:
$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ e $k.(x, y, z) = (kx, y, z)$
b) O conjuntos de ternos ordenados (*x*,*y*,*z*) de reais com as operações:
$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ e $k.(x, y, z) = (0, 0, 0)$
c) O conjuntos de ternos ordenados (*x*,*y*,*z*) de reais com as operações:
$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ e $k.(x, y, z) = (2kx, 2ky, 2kz)$
d) O conjuntos de pares ordenados (*x*,*y*) de reais, em que $x \geq 0$, com as operações usuais em R^2.
e) O conjuntos de pares ordenados (*x*,*y*) de reais com as operações:
$(x, y) + (x', y') = (x + x' + 1, y + y' + 1)$ e $k.(x, y) = (kx, ky)$
f) O conjunto dos reais positivos com as operações $x + x' = xx'$ e $kx = x^k$.
g) O conjunto das matrizes da forma:

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix},$$

com a adição de matrizes e multiplicação usual por escalares.
h) O conjunto das matrizes 2×2 da forma:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix},$$

com a adição de matrizes e multiplicação usual por escalares.
i) O conjunto das funções reais de variável real, tais que $f(1) = 0$, com as operações usuais de adição e multiplicação (definidas ponto a ponto).
j) O conjunto das funções reais de variável real, tais que *f* é periódica, com as operações usuais de adição e multiplicação (definidas ponto a ponto).
k) O conjunto das matrizes 2×2 da forma:

$$\begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix},$$

com a adição de matrizes e multiplicação usual por escalares.
l) As rectas de R^3 que passam pela origem.
m) Os planos de R^3 que passam pela origem.

2.2 Prove que cada espaço linear possui um único neutro e um único simétrico para cada vector, em relação à adição.

2.3 Usando os axiomas de espaço linear prove:

Seja V um espaço linear, x um vector qualquer de V e k um escalar, então:

a) $0x = \vec{0}$
b) $k\vec{0} = \vec{0}$
c) $(-1)x = -x$
d) Se $kx = \vec{0}$, então $k = 0$ ou x = $\vec{0}$

2.4 Determine quais os subespaços de R^3

a) Os vectores da forma (a,0,0).
b) Os vectores da forma (a,1,1).
c) $\{(x, y, z) \in R^3 : z = x + y\}$
d) $\{(x, y, z) \in R^3 : z = x + y + 1\}$

2.5 Determine quais os subespaços de $M^{2,2}$.

a) Matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

em que a,b,c e d são inteiros.
b) Matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

em que $a + d = 0$.
c) As matrizes 2×2 em que $A = A^t$.
d) Matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

em que $c = 0$, matrizes triangulares superiores.
e) As matrizes 2×2 em que $\det A = 0$.

2.6 Determine quais os subespaços de $M^{n,n}$.

a) Matrizes $n \times n$ em todas as entradas são constituídas por inteiros.
b) As matrizes $n \times n$ em que $A = A^t$.
d) Matrizes $n \times n$ triangulares superiores.
e) As matrizes $n \times n$ em que $\det A = 0$.

2.7 Quais dos seguintes conjuntos são subespaços de P_3

a) Os polinómios $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ (de coeficientes reais) em que $a_0 = 0$.
b) Os polinómios $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ (de coeficientes reais) em que $a_0 + a_1 + a_2 = 0$.

c) Os polinómios $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ em que a_0, a_1, a_2, a_3 são inteiros.
d) Os polinómios $a_0 + a_1 t$ (de coeficientes reais).

2.8 Quais os conjuntos seguintes que são subespaços do espaço das funções reais de variável real, V(F), com as operações usuais.

a) As funções *f* tais que $f(x) \leq 0, \forall x \in R$
b) As funções *f* tais que $f(0) = 0$.
b) As funções *f* tais que $f(0) = 2$.
d) As funções constantes.
e) As funções da forma $a + b\sin 2x + c\cos 2x, \forall x \in R$

2.9 Quais dos vectores seguintes são combinações lineares de
$u = (1, -1, 3)$ e de $v = (2, 4, 0)$:

a) $(3,3,3)$ b) $(2,4,6)$ c) $(1,5,6)$ d) $(0,0,0)$

2.10 Exprimir os vectores seguintes como combinações lineares de $2 + t + 4t^2$, $1 - t + 3t^2$ e de $3 + 2t + 5t^2$.

a) $5 + 9t + 5t^2$ b) $2 + 6t^2$ c) 0 d) $2 + 2t + 3t^2$

2.11 Exprimir as matrizes das alíneas a), b), c) e d) como combinações lineares de

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{e} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

a) $\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

2.12 Em cada alínea determinar se os vectores dados geram R^3

a) $v_1 = (1,1,1), v_2 = (2,2,0), v_3 = (3,0,0)$
b) $v_1 = (2,-1,3), v_2 = (4,1,2), v_3 = (8,-1,8)$
c) $v_1 = (3,1,4), v_2 = (2,-3,5), v_3 = (5,-2,9), v_4 = (1,4,-1)$
d) $v_1 = (1,3,3), v_2 = (1,3,4), v_3 = (1,4,3), v_4 = (6,2,1)$

2.13 Seja E o espaço gerado por:

$$f = \cos^2 t \ \text{ e } \ g = \sin^2 t$$

Determinar se os vectores da seguintes alíneas pertencem a E
a) $\cos 2t$ b) $3 + t^2$ c) 1 d) $\sin t$

2.14 Os seguintes polinómios geram P_2?

$p_1 = 1 + 2t - t^2, p_2 = 3 + t^2, p_3 = 5 + 4t - t^2, p_4 = -2 + 2t - 2t^2$

2.15 Mostre que os seguintes conjuntos de funções formam subespaços do espaço das funções reais de variável real V(F).
a) As funções contínuas.
b) As funções de classe C^1.

c) As funções de classe C^1 que satisfazem $f' + 2f = 0$.

2.16 Quais os conjuntos linearmente independentes e os linearmente dependentes.

a) Em R^3:
i) $(2,-1,4),(3,6,2),(2,10,-4)$ ii) $(3,1,1),(2,-1,5),(4,0,-3)$ iii) $(6,0,-1),(1,1,4)$
iv) $(1,3,3),(0,1,4),(5,6,3),(7,2,-1)$
b) Em R^4:
i) $(1,2,1,-2),(0,-2,-2,0),(0,2,3,1),(3,0,-3,6)$
ii) $(4,-4,8,0),(2,2,4,0),(6,0,0,2),(6,3,-3,0)$
iii) $(4,4,0,0),(0,0,6,6),(-5,0,5,5)$
iv) $(3,0,4,1),(6,2,-1,2),(-1,3,5,1),(-3,7,8,3)$
c) Em P^2
i) $2 - t + 4t^2, 3 + 6t + 2t^2, 2 + 10t - 4t^2$ ii) $3 + t + t^2, 2 - t + 5t^2, 4 - 3t^2$
iii) $1 + t + 4t^2, 6 - t^2$ iv) $1 + 3t + 3t^2, t + 4t^2, 5 + 6t + 3t^2, 7 + 2t - t^2$
d) Em V(F)
i) $2, 4\sin^2 t, \cos^2 t$ ii) $t, \cos t$ iii) $1, \sin t, \sin 2t$
iv) $\cos 2t, \sin^2 t, \cos^2 t$ v) $(x+1)^2, x^2 + 2x, 3$ vi) $0, x, x^2, f(x)$
vii) $\sinh^2 t, \cosh^2 t, 1$ viii) $\sinh 2t, \cosh^2 t, 3$

2.17 Determine quais dos seguintes conjuntos de vectores de R^3 se situam no mesmo plano ou na mesma recta, indicar em cada caso a situação.
a) $(1,0,-2),(3,1,2),(1,-1,0)$ b) $(2,-1,4),(4,2,3),(2,7,-6)$
c) $(3,-6,9),(2,-4,6),(1,1,1)$ d) $(4,6,8),(2,3,4),(-2,-3,-4)$

2.18 Para que valores de λ o seguinte conjunto é linearmente dependente:

$$\left\{(\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda)\right\}$$

2.19 Prove:
-Sendo u,v e w quaisquer vectores, {u-v,v-w,w-u} é um conjunto linearmente dependente.

2.20 Determine a dimensão e uma base para o espaço solução de cada um dos sistemas seguintes:

a) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ -2x-y+2z=0 \\ -x+z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+y+z+t=0 \\ 5x-y+z-t=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-8y+6z+2t=0 \\ -x+4y-3z-t=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ x+5z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+2y-2z=0 \\ 4x+3y-z=0 \\ 6x+5y+z=0 \end{cases}$

2.21 Determine bases para cada um dos subespaços de R^3

a) O plano $\{(x,y,z): 2x-2y+3z=0\}$

b) O plano $\{(x,y,z): y+z=0\}$

c) A linha dada pelas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x=3t \\ y=-2t \\ z=4t \end{cases}$$

2.22 Determine a dimensão e uma base para o subespaço de P_4

$\{a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4 \in P_4 : a_0+a_1+a_2=0 \wedge a_0+a_1+a_3=0\}$

2.23 Seja $\{u_1,u_2,u_3\}$ uma base de um espaço V. Prove que $\{u_1+u_2+u_3, u_1+u_2, u_1\}$ também é base de V.

2.24 Prove que o espaço de todas as funções reais de variável real, com as operações usuais, é um espaço linear de dimensão infinita.

2.25 Prove que um subespaço de um espaço de dimensão finita é de dimensão finita.

2.26 Prove que um subespaço V de um espaço de dimensão finita W verifica:

$$\dim(V) \le \dim(W)$$

2.27 Encontrar a característica e bases para o espaço das colunas e das linhas das matrizes seguintes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -12 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 6 & 3 \\ 5 & -3 & 10 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

2.28 Encontrar bases para os subespaços de R^4 gerados pelos seguintes conjuntos de vectores:

a) $\{(1,1,-4,-3),(2,0,2,-2),(2,-1,3,2)\}$
b) $\{(-1,1,-2,0),(3,3,6,0),(3,0,0,1)\}$
c) $\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(-1,0,1,1),(0,-3,0,3)\}$

2.29 Encontrar os subconjuntos que formam bases para os espaços gerados pelos conjuntos de vectores seguintes:

a) $\{1-t+5t^2+2t^3, -2+3t+t^2, 4-5t+9t^2+4t^3, 4t+2t^2-3t^3, -7+18t+2t^2-8t^3\}$
b) $\{(1,0,1,1),(-3,3,7,1),(-1,3,9,3),(-5,3,5,-1)\}$
c) $\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\right\}$

2.30 Usar a informação dada em cada alínea para determinar se o sistema $Ax=b$ é possível (determinado ou não) e impossível.

	Tipo de A	$Car(A)$	$Car([A\|b])$
a)	3×3	3	3
b)	3×3	2	3
c)	3×3	1	1
d)	5×9	2	2
e)	5×9	2	3
f)	4×4	0	0
g)	6×2	2	2

2.31 Provar:

a) Um sistema $Ax=b$ tem solução sse a característica da matriz dos coeficientes A e a característica da matriz aumentada $[A|b]$ são iguais.
b) Se $Ax=b$ é um sistema, em que A é a matriz dos coeficientes $m\times n$, se A tem característica r o sistema tem $n-r$ variáveis livres.

2.32 Provar que as colunas de uma matriz $n\times n$ invertível formam base de R^n.

2.33 Encontrar a matriz mudança de base e representar o vector w na base B:

a) $B=\{(1,0),(1,1)\}, w=(2,-4)$. b) $B=\{(2,-2),(3,4)\}, w=(2,2)$.

c) $B=\{1+t, 1-t\}, w=2-3t$.

2.34 Seja v um vector representado na base $B=\{u_1, u_2, u_3\}$, representar v na base canónica:

a) $B=\{(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}, v=3u_1+u_2-2u_3$.
b) $B=\{(2,1,0),(-1,1,1),(1,1,1)\}, v=u_1+2u_2-u_3$.

2.34 Seja *w* um vector representado na base $B=\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, representar *w* na base canónica de P_3, $B=\{1-t+t^2+t^3, -2+3t+t^2, 1-t+t^2-t^3, 1\}, w=2u_1+u_3$.

2.35 Representar o vector *w* da alínea anterior na base $\{1+t+t^2+t^3, -t+t^2, t+t^2+t^3, t^3\}$.

2.36 Seja *A* um vector de $M^{2,2}$, representar *A* na base *B*, não esquecer a determinação da matriz mudança de base:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix},\ B=\left\{\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}.$$

2.37 Considere as bases $B=\{u_1, u_2, u_3\}$ e $B'=\{u'_1, u'_2, u'_3\}$ de R^3 onde:

$$u_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}, u_2=\begin{bmatrix}-3\\2\\-1\end{bmatrix}, u_3=\begin{bmatrix}1\\6\\-1\end{bmatrix}, u'_1=\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix}, u'_2=\begin{bmatrix}-2\\-6\\4\end{bmatrix}, u'_3=\begin{bmatrix}-2\\-3\\7\end{bmatrix},$$

a) Determine a matriz mudança de base de *B* para *B*'.
b) Represente $w=-5u_1+8u_2-5u_3$ na base B'.

2.38 Represente o mesmo vector *w* da alínea anterior mas considerando *B* e *B*' como se segue:

$$u_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}, u_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}, u_3=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, u'_1=\begin{bmatrix}3\\1\\5\end{bmatrix}, u'_2=\begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix}, u'_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$$

2.39 Seja V o espaço gerado por $f_1=\cos t$ e por $f_2=\sin t$.
a) Mostre que $g_1=2\sin t+2\cos t$ e por $g_2=\cos t$ formam uma base para V.
b) Qual a matriz da mudança de base de $B=\{g_1, g_2\}$ para $B'=\{f_1, f_2\}$.
c) Qual a matriz da mudança de base de B' para B.
d) Sendo $h=5\cos t-3\sin t$, represente *h* na base *B*.
e) Represente *h* na base *B*', parta da representação de *h* na base *B* e utilize uma das matrizes mudança de base calculada nas alíneas precedentes.