MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

LEFT – LEBL – LQ – LEAM – LEMAT

Ano Lectivo: 2006/2007   Semestre: 2º

TCCC – Exercícios

[**1.1**] Suponha que pretende calcular a soma de três números reais a, b, c, $S = a + b + c$, usando os dois seguintes algoritmos:

$$(1)\ S_1 = (a+b)+c; \qquad (2)\ S_2 = a+(b+c).$$

(a) Para

$$a = 0.33678429 \times 10^2, \qquad b = -0.33677811 \times 10^2, \qquad c = 0.23371258 \times 10^{-4},$$

calcule o valor exacto de S.

(b) Para os valores de a, b, c da alínea (a), e supondo que efectua os cálculos num sistema FP(10,8,-10,10), com arredondamento simétrico, calcule valores aproximados de S usando os dois algoritmos indicados.

(c) Determine os erros relativos dos valores obtidos na alínea (b).

(d) Determine a expressão do erro relativo do algoritmo (1) em termos dos erros relativos das parcelas e dos erros de arredondamento das duas operações. Utilize este resultado para concluir qual a ordem por que deve proceder à soma por forma a minimizar os efeitos dos erros de arredondamento.

[**1.2**] Considere o polinómio definido por

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

e os dois seguintes algoritmos para o cálculo de $f(x)$:

$$(1)\quad f_1(x) = x \times (x \times x) + a \times (x \times x) + b \times x + c.$$

$$(2)\quad f_2(x) = \big((x+a) \times x + b\big) \times x + c$$

O algoritmo (2) é designado por algoritmo de Horner.

(a) Para $a = -6.1$, $b = 3.2$, $c = 1.5$, calcule o valor exacto de $f(4.71)$.

(b) Para $a = -6.1$, $b = 3.2$, $c = 1.5$, e supondo que efectua os cálculos no sistema FP(10,3,-10,10), com arredondamento simétrico, calcule valores aproximados de $f(4.71)$ usando os dois algoritmos indicados.

(c) Determine os erros relativos dos valores obtidos na alínea (b).

(d) Determine a expressão do erro relativo do algoritmo de Horner em termos dos erros relativos de a, b, c, x e dos erros de arredondamento das operações efectuadas.

[**1.3**] Considere a equação quadrática

$$x^2 + 2bx + c = 0,$$

com coeficientes b e c reais positivos. Considere os dois seguintes algoritmos para o cálculo das raízes x_1 e x_2 da equação:

$$\begin{aligned} &(1) \quad x_1 = -b - \sqrt{b^2 - c}, \qquad && x_2 = -b + \sqrt{b^2 - c}; \\ &(2) \quad x_1 = -b - \sqrt{b^2 - c}, \qquad && x_2 = \frac{c}{x_1}. \end{aligned}$$

(a) Para $b = 34.56, \ c = 1$, verifique que as raízes têm os valores $x_1 = -69.105529\ldots$ e $x_2 = -0.014470622\ldots$

(b) Para $b = 34.56$, $c = 1$, e supondo que efectua os cálculos num sistema FP(10,4,-10,10), com arredondamento simétrico, obtenha valores aproximados para as raízes usando os algoritmos indicados.

(c) Determine os erros relativos dos valores obtidos na alínea (b).

(d) Determine as expressões dos erros relativos dos dois algoritmos indicados em termos dos erros relativos dos coeficientes b, c e dos erros de arredondamento das operações efectuadas. Suponha que a raiz quadrada é uma operação elementar.

[**1.4**] Considere o sistema linear

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b,$$

onde A é uma matriz 2×2 não singular de elementos reais e b é um vector de $\mathbb{R}^2$, ambos supostos conhecidos.

(a) Para

$$A = \begin{bmatrix} 0.003000 & 59.14 \\ 5.291 & -6.130 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 59.17 \\ 46.78 \end{bmatrix},$$

verifique que a solução exacta do sistema é $x = 10.00, \ y = 1.000$.

(b) Supondo que efectua os cálculos num sistema FP(10,4,-10,10), com arredondamento simétrico, determine as soluções aproximadas do sistema pelo método de eliminação de Gauss, sem e com pesquisa parcial de pivot.

(c) Determine os erros relativos das soluções aproximadas obtidas na alínea (b).

(d) Para A e b com componentes arbitrárias, sem erros inerentes e com representação exacta no sistema de ponto flutuante utilizado, determine a expressão dos erros relativos dos valores aproximados $\tilde{x}, \tilde{y}$ de x, y, obtidos pelo método de eliminação de Gauss, em termos dos erros de arredondamento das operações utilizadas .

[**2.1**] Sendo $x \in \mathbb{C}^n$ mostre que:

(a) $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_2$;

(b) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\, \|x\|_\infty$;

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$;

(d) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$;

(e) $\dfrac{1}{n}\,\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_1$;

(f) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\|x\|_2 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2$.

[**2.2**] Sendo $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ mostre que:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\|A\|_2 \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2$;

(b) $\dfrac{1}{n}\,\|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq n\,\|A\|_\infty$;

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|A\|_1$;

(d) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|A\|_\infty$;

(e) $\dfrac{1}{n}\,\|A\|_1 \leq \|A\|_\infty \leq n\,\|A\|_1$;

(f) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\|A\|_2 \leq \|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2$.

[**2.3**] Mostre que a norma matricial associada à norma do máximo em $\mathbb{C}^n$ tem a forma

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

onde $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$.

[**3.1**] Considere a equação

$$e^x - \sin x = 0.$$

(a) Mostre que a equação tem uma e uma só raiz z no intervalo $[-3.5, -2.5]$.

(b) Utilize o método da bissecção para determinar um valor aproximado da raiz z com um erro absoluto inferior a 0.05.

(c) Determine o número de iteracções do método da bissecção suficientes para garantir que o erro absoluto do valor aproximado da raiz z seja inferior a 10^{-6}.

[**3.2**] Considere a equação

$$e^x - 4x^2 = 0.$$

(a) Mostre que a equação tem apenas três raízes reais, $z_1 < z_2 < z_3$, tais que

$$z_1 \in [-1, 0], \qquad z_2 \in [0, 1], \qquad z_3 \in [4, 5].$$

(b) Mostre que o método do ponto fixo com função iteradora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{1}{2}\, e^{x/2},$$

converge para z_2, qualquer que seja a iterada inicial $x_0 \in [0, 1]$.

(c) Determine um valor aproximado da raiz z_2 pelo método da alínea (b) com um erro absoluto inferior a 0.01.

(d) Mostre que não é possível usar o método da alínea (b) para obter um valor aproximado da raiz z_3, embora z_3 seja um ponto fixo de g.

[**3.3**] Considere a equação

$$e^x - 4x^2 = 0.$$

para a qual foi verificado na alínea (a) do Exercício [3.2] que tem apenas três raízes reais $z_1 < z_2 < z_3$.

(a) Mostre que o método do ponto fixo com função iteradora $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \log(4x^2),$$

converge para z_3, qualquer que seja a iterada inicial $x_0 \in [4, 5]$.

(b) Determine um valor aproximado da raiz z_3 pelo método da alínea (a) com um erro absoluto inferior a 0.01.

(c) Mostre que não é possível usar o método da alínea (a) para obter valores aproximados das raízes z_1 e z_2.

[**3.4**] Considere a equação

$$f(x) = 1 - 2x + 2e^{-x} = 0,$$

e o seguinte método iterativo:

$$x_0 \in \mathbb{R}, \qquad x_{m+1} = x_m + \frac{f(x_m)}{2+\alpha}, \quad m = 0, 1, \ldots$$

com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

(a) Mostre que a equação tem uma única raiz real z tal que $z \in [0, 1]$.

(b) Mostre que para todo o $\alpha \in [0, 1]$ o método iterativo converge para a raiz z, qualquer que seja $x_0 \geq 0$.
Sugestão: Utilize o teorema do ponto fixo no intervalo $[0, \max\{2, x_0\}]$.

(c) Determine valores aproximados da raiz z com um erro inferior a 10^{-5} usando o método iterativo com $\alpha = 0.4$ e $\alpha = 0.8$. Considere em ambos os casos $x_0 = 2$.

(d) Determine o valor de α para o qual a convergência do método iterativo para a raiz z é a mais rápida possível.

[**3.5**] Considere os seguintes métodos iterativos:

$$\begin{aligned}
&(1)\ x_{n+1} = g_1(x_n), \quad n \geq 0, \qquad && g_1(x) = -16 + 6x + \frac{12}{x};\\
&(2)\ x_{n+1} = g_2(x_n), \quad n \geq 0, \qquad && g_2(x) = \frac{12}{1+x};\\
&(3)\ x_{n+1} = g_3(x_n), \quad n \geq 0, \qquad && g_3(x) = \frac{2}{3}\,x + \frac{1}{x^2};\\
&(4)\ x_{n+1} = g_4(x_n), \quad n \geq 0, \qquad && g_4(x) = \frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}, \quad a > 0.
\end{aligned}$$

Determine em cada um dos casos:

- os pontos fixos de g_i para os quais o método converge;
- a ordem de convergência do método;
- o factor assimptótico de convergência.

[**3.6**] Considere uma sucessão $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ e outra $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ construída a partir da primeira pela fórmula

$$y_n = x_n - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-x_{n+1}-(x_{n+1}-x_n)} = \frac{x_n x_{n+2} - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n},$$

para $n \geq 0$.

(a) Pondo $x_n = z - e_n$ verifique que y_n se pode escrever na forma

$$y_n = z - \frac{e_n e_{n+2} - e_{n+1}^2}{e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n}.$$

(b) Mostre que se $\{x_n\}$ converge linearmente para z então $\{y_n\}$ converge para z mais depressa do que $\{x_n\}$.
<u>Sugestão:</u> Pondo $e_{n+1} = e_n(K + \delta_n)$, onde $0 < K < 1$ e $\delta_n \to 0$, quando $n \to \infty$, exprima $z - y_n$ em termos de δ_n, δ_{n+1} e K, e finalmente verifique que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z-y_n}{z-x_n} = 0.$$

(c) Tomando $x_0 = 6,\ x_{n+1} = g(x_n),\ n \geq 0$, onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 6.28 + \sin x,$ e $z = 6.01550307297\ldots$ calcule $x_n, z-x_n$ para $n = 0, 1, \ldots, 9$ e $y_n, z-y_n$ para $n = 0, 1, \ldots, 7$.

<u>Nota.</u> A utilização da sucessão $\{y_n\}$ para acelerar a convergência da sucessão $\{x_n\}$ é conhecida pelo método Δ^2 de Aitken para aceleração da convergência de uma sucessão.

[**3.7**] Considere o polinómio do 3º grau

$$p(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 16.$$

(a) Mostre que o polinómio tem três raízes reais, $z_1 < z_2 < z_3$, tais que

$$z_1 \in [1.0, 1.2], \qquad z_2 \in [2.6, 2.8], \qquad z_3 \in [5.0, 5.2].$$

(b) Mostre que o método de Newton com iterada inicial $x_0 \in [1.0, 1.2]$ converge para a raiz z_1.

(c) Utilize o método de Newton para obter um valor aproximado da raiz z_1 com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

[**3.8**] Considere o polinómio do Exercício [3.7].

(a) Mostre que o método de Newton com iterada inicial $x_0 \in [2.6, 2.8]$ converge para a raiz z_2.

(b) Utilize o método de Newton para obter um valor aproximado da raiz z_2 com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

[**3.9**] Determine, usando o método de Newton, com um erro inferior a 10^{-6}, o valor mínimo de $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$a\sqrt{x} \geq \sin x, \qquad \forall x \geq 0.$$

[**3.10**] Considere os seguintes métodos para obter um valor aproximado de $\sqrt[p]{c}$, onde $c > 0$ e $p \in \mathbb{N},\ p \geq 2$:

(1) O método de Newton aplicado à função $f(x) = x^p - c$;

(2) O método de Newton aplicado à função $F(x) = x^q f(x),\ q \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que o método (1) converge para $\sqrt[p]{c}$ para qualquer valor inicial $x_0 > 0$.

(b) Determine o valor de q para o qual o método (2) tem ordem de convergência 3.

(c) Mostre que o método (2), com $q = \dfrac{1-p}{2}$, converge para $\sqrt[p]{c}$ para qualquer valor inicial $x_0 > 0$.

(d) Calcule $\sqrt[3]{231}$ com um erro absoluto inferior a 10^{-9}, usando:

- o método (1);
- o método (2), com $q = -1$.

[**3.11**] Considere o polinómio do 3º grau

$$p(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 16,$$

para o qual foi verificada no Exercício [3.7] a existência de três raízes reais, $z_1 < z_2 < z_3$, tais que

$$z_1 \in [1.0, 1.2], \qquad z_2 \in [2.6, 2.8], \qquad z_3 \in [5.0, 5.2].$$

(a) Mostre que o método da secante com iteradas iniciais $x_0, x_1 \in [5.0, 5.2]$ converge para a raiz z_3.

(b) Utilize o método da secante para obter um valor aproximado da raiz z_3 com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

[**3.12**] Considere a equação

$$x^3 - \cos x - 1 = 0.$$

(a) Mostre que a equação tem uma única raiz real, z, tal que $z \in [1, 2]$.

(b) Mostre que o método da secante com iteradas iniciais $x_0, x_1 \in [1, 2]$ converge para a raiz z.

(c) Utilize o método da secante para obter um valor aproximado da raiz z com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

[**4.1**] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 7 & 11 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine a matriz inversa de A usando o método de eliminação de Gauss com pesquisa parcial de pivot.

(b) Determine os valores próprios de A usando o método de Newton para calcular as raízes do polinómio característico de A.

(c) Determine os números de condição da matriz A relativos às normas $\|\cdot\|_p$, $p = 1, 2, \infty$.

[**4.2**] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \alpha+1 & \alpha \\ \alpha & \alpha-1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \gg 1.$$

(a) Mostre que os valores próprios da matriz A e os correspondentes vectores próprios são

$$\lambda_1 = \alpha + \beta, \qquad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\beta-1}{\alpha} \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = \alpha - \beta, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\beta-1}{\alpha} \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde $\beta = \sqrt{\alpha^2 + 1}$.

(b) Determine $\mathrm{cond}_p(A)$, $\ p = 1, 2, \infty$.

(c) Determine as soluções dos sistemas lineares

$$Ax = b, \qquad A\tilde{x} = \tilde{b},$$

onde $b = \lambda_1 u_1$, $\tilde{b} = b + \varepsilon u_1$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, e verifique a validade da desigualdade

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \mathrm{cond}_\infty(A) \frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty}.$$

(d) Determine as soluções dos sistemas lineares

$$Ax = b, \qquad A\bar{x} = \bar{b},$$

onde $b = \lambda_1 u_1$, $\bar{b} = b + \varepsilon u_2$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, e verifique a validade da desigualdade

$$\frac{\|x - \bar{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \mathrm{cond}_\infty(A) \frac{\|b - \bar{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty}.$$

[**4.3**] Considere a matriz $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ da forma

$$A = \begin{bmatrix} \beta & \alpha & \cdots & \cdots & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0.$$

(a) Determine a matriz inversa de A.

(b) Determine $\mathrm{cond}_1(A), \mathrm{cond}_\infty(A)$ e $\mathrm{cond}_*(A)$.

(c) Considere os sistemas lineares

$$Ax = b, \qquad \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b},$$

onde A é tomada com $\alpha = \beta = 1$, $b \in \mathbb{R}^n$ é tal que $\|b\|_\infty = 1$, $\tilde{b}$ difere de b a menos de 10^{-2m} em cada uma das componentes e $\tilde{A}$ é obtida a partir de A por adição de 10^{-2m} aos seus elementos; m é tal que $n10^{-m} \equiv \mu < 1$. Apresente uma estimativa para o erro relativo da solução $\tilde{x}$ em relação à solução x.

[**4.4**] Considere o sistema linear $Ax = b$, onde $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ é uma matriz triangular, superior ou inferior, não singular. Mostre que quer o método de Jacobi quer o método de Gauss-Seidel, com condição inicial arbitrária, permitem obter a solução exacta do sistema num número finito de iteradas e determine quantas.

[**4.5**] Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 5 \\ 1 & -3 & -10 \\ 10 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 22 \\ -21 \\ 31 \end{bmatrix}.$$

(a) Por reordenação das linhas obtenha um sistema $A'x = b'$ para o qual os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel sejam convergentes para a sua solução para qualquer condição inicial. Justifique.

(b) Determine um valor aproximado da solução do sistema $A'x = b'$ com um erro absoluto inferior a 0.1 pelo método de Jacobi com condição inicial $x^{(0)} = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$.

(c) Determine um valor aproximado da solução do sistema $A'x = b'$ com um erro absoluto inferior a 0.1 pelo método de Gauss-Seidel com condição inicial $x^{(0)} = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$.

[**4.6**] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & \alpha \\ 3 & 4 & 1 \\ \alpha & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determine os valores de α para os quais a matriz A é definida positiva.

Nota. Uma matriz simétrica $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ diz-se *definida positiva* se e só se $x^T A x > 0, \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Uma matriz é definida positiva se e só se são positivos os determinantes de todos os menores principais de A; chama-se *menor principal* de A à submatriz de dimensão k de A cujos elementos são os elementos das primeiras k linhas e k colunas de A, com $k = 1, 2, \ldots, n$.

(b) Determine os valores de α para os quais a matriz $2D - A$, onde D é uma matriz diagonal com a mesma diagonal principal que A, é definida positiva.

(c) Determine os valores de α para os quais o método de Gauss-Seidel converge para a solução do sistema $Ax = b, \;\; \forall b \in \mathbb{R}^3, \;\; \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

(d) Determine os valores de α para os quais o método de Jacobi converge para a solução do sistema $Ax = b, \;\; \forall b \in \mathbb{R}^3, \;\; \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

[**4.7**] Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

para o qual foi verificado no Exercício [4.6] que o método de Gauss-Seidel converge para a sua solução para qualquer condição inicial enquanto que o método de Jacobi não converge para todas as condições iniciais. Mostre que o método de Jacobi converge para a solução do sistema $Ax = b$ se e só se as condições iniciais pertencerem ao plano

$$\left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2} = \frac{1}{8} \right\}.$$

[**4.8**] Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix},$$

$0 < \alpha < 1$, e b é um vector arbitrário. Estude a convergência do método de Gauss-Seidel modificado com parâmetro $\omega > 0$ para a solução do sistema $Ax = b$ para qualquer condição inicial para todos os valores de α e ω.

[**4.9**] Considere o sistema linear $Ax = b$, onde A é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix},$$

e b é um vector arbitrário. Determine os valores do parâmetro $\omega \in \mathbb{R}^+$ para os quais o método de Jacobi modificado converge para a solução do sistema $Ax = b$ para qualquer condição inicial e o valor ω_{opt} para o qual o método converge mais rapidamente.

[**5.1**] Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 5x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ 4x_2 - \sin x_1 - \cos x_2 = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que o sistema tem apenas duas soluções em $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule valores aproximados das duas soluções usando em cada caso quatro iteradas do método do ponto fixo com a função iteradora apropriada.

(c) Obtenha uma estimativa do erro das duas aproximações obtidas na alínea (b) usando a norma do máximo.

[**5.2**] Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \varepsilon \cos x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3\varepsilon x_1 x_3 = 0 \\ \varepsilon x_1^2 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

onde ε é um parâmetro real.

a) Mostre que para $-\dfrac{1}{2} < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$ o sistema tem uma solução única z no conjunto

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_\infty \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

b) Para $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$, obtenha um valor aproximado da solução z pelo método do ponto fixo com condição inicial $x^{(0)} = 0$ com um erro inferior a 0.1 (usando a norma do máximo).

c) Para $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$, determine quantas iteradas do método do ponto fixo com condição inicial $x^{(0)} = 0$ seriam necessárias para garantir um erro da solução inferior a 10^{-6} (usando a norma do máximo).

[**5.3**] Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2(x_3 + 1) - 10 = 0 \\ 3x_2 + x_3^2 - 8 = 0 \\ 3x_1 + x_3^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

a) Determine o valor aproximado de uma das soluções do sistema usando duas iteradas do método de Newton generalizado com aproximação inicial $x^{(0)} = [\alpha \quad \beta \quad 1]^T$, onde α, β são números reais arbitrários.

b) Determine o valor aproximado de outra das soluções do sistema usando duas iteradas do método de Newton generalizado com aproximação inicial $x^{(0)} = [-4 \quad -4 \quad -4]^T$.

c) Verifique analiticamente que o sistema tem três e só três soluções em $\mathbb{R}^3$.

[**5.4**] Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} x_1^2 + x_1 x_2^3 = 9 \\ 3x_1^2 x_2 - x_2^3 = 4 \end{cases}$$

a) Determine o valor aproximado de uma das soluções do sistema usando duas iteradas do método de Newton generalizado com aproximação inicial $x^{(0)} = [1.35 \;\; 1.75]^T$.

b) Obtenha uma estimativa do erro da solução aproximada obtida na alínea anterior (usando a norma do máximo).

c) Investigue a existência de outras soluções do sistema usando o método de Newton generalizado com diferentes aproximações iniciais.

[**6.1**] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	1	16

(a) Determine o polinómio interpolador de f, p_3, nos pontos da tabela pela fórmula de Lagrange.

(b) Determine o polinómio interpolador de f, p_3, nos pontos da tabela pela fórmula de Newton às diferenças divididas.

(c) Mostre que

$$\max_{x\in[-1,2]} \left| x(x-2)(x^2-1) \right| = 1.$$

Sugestão: Introduza a mudança de variável $x = \theta + \frac{1}{2}$.

(d) Sabendo que $|f^{(4)}(x)| \leq 25, \ \ \forall x \in [-1, 2]$, obtenha um majorante para o erro

$$e_3(x) = f(x) - p_3(x),$$

válido para todos os valores de $x \in [-1, 2]$.

(e) Sabendo que $f[1, 2, 3] = 25$ determine o polinómio interpolador de f, p_4, nos pontos $-1, 0, 1, 2, 3$.

(f) Sabendo que f é um polinómio de grau 5 com quinta derivada positiva utilize toda a informação disponível para obter a sua forma.

[**6.2**] Seja $f \in C^1([a, b])$ tal que $f(a)f(b) < 0$ e $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$; logo existe um único $z \in]a, b[$ tal que $f(z) = 0$.

(a) Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n + 1$ pontos distintos de $[a, b]$ e sejam $y_0, y_1, \ldots, y_n$ os valores de f nesses pontos, isto é, $y_j = f(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Escreva uma expressão para o polinómio $q_n \in \mathcal{P}_n$ que interpola f^{-1} nos nós $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

(b) Notando que $z = f^{-1}(0)$, utilize o polinómio q_3 e os seguintes valores tabelados para aproximar a raiz da equação

$$f(x) := e^{-x} - x = 0.$$

x_i	0.3	0.4	0.5	0.6
e^{-x_i}	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812

[**6.3**] Seja p_n o polinómio interpolador de f em $n + 1$ nós $x_0, x_1, \ldots, x_n$, igualmente espaçados do intervalo $[a, b]$ e tais que $x_0 = a$ e $x_n = b$.

(a) Mostre que se existirem constantes positivas c e M tais que $\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq cM^n$ então $\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$. Verifique que este resultado se aplica à função $f(x) = e^{3x}$.

(b) Mostre que se existirem constantes positivas c e M, $M(b - a) < e$, tais que $\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq cM^n(n + 1)!$, então também $\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$.

[**6.4**] Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \qquad\qquad g(x) = e^x + e^{-x}.$$

(a) Determine os polinómios interpoladores de f nos pontos

$$x_k = -1 + \frac{2k}{n}, \qquad k = 0, \ldots, n,$$

para $n = 4$ e $n = 8$. Compare graficamente os polinómios interpoladores com a função f.

(b) Determine os polinómios interpoladores de g nos mesmos pontos da alínea (a) para $n = 4$ e $n = 8$. Compare graficamente os polinómios interpoladores com a função g.

(c) Determine os polinómios interpoladores de f nos nós de Chebyshev,

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

para $n = 4$ e $n = 8$. Compare graficamente os polinómios interpoladores com a função f.

[**7.1**] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	1	16

(a) Determine de entre os polinómios $p \in \mathcal{P}_1$ aquele que minimiza a *distância*

$$d(f,p) = \left[\sum_{i=0}^{3}[f(x_i) - p(x_i)]^2\right]^{1/2}.$$

(b) Idem para $p \in \mathcal{P}_2$.

(c) Idem para $p \in \mathcal{P}_3$.

(d) Determine em cada um dos casos o valor mínimo da *distância* $d(f,p)$.

Nota: $\mathcal{P}_m$ designa o conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a $m \in \mathbb{N}$.

[**7.2**] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

i	0	1	2	3	4
x_i	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0
$f(x_i)$	0.0	0.5	1.0	0.5	0.0

Determine de entre os polinómios trigonométricos da forma

$$\phi(x) = a_0 + a_1\cos(\pi x) + a_2\cos(2\pi x),$$

aquele que minimiza a *distância*

$$d(f,\phi) = \left[\sum_{i=0}^{4}[f(x_i) - \phi(x_i)]^2\right]^{1/2}.$$

[**7.3**] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

i	0	1	2	3
x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0
$f(x_i)$	5.43656	2.0	0.735759	0.270671

Determine de entre as funções da forma

$$\phi(x) = \frac{1}{ax+b}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-b/a\},$$

aquela que minimiza a *distância*

$$d(f,\phi) = \left[\sum_{i=0}^{3} [f(x_i) - \phi(x_i)]^2\right]^{1/2}.$$

[**7.4**] Determine de entre os polinómios de grau menor ou igual a 2 a *melhor aproximação mínimos quadrados* da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^4 + x^3$, relativamente aos seguintes produtos internos:

(a)

$$\langle g, h \rangle = \int_{-1}^{1} g(x)h(x)\, dx, \qquad \forall g, h \in C([a,b]).$$

Sugestão: utilize os polinómios de Legendre.

(b)

$$\langle g, h \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{g(x)h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \qquad \forall g, h \in C([a,b]).$$

Sugestão: utilize os polinómios de Chebyshev.

(c)

$$\langle g, h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g(x)h(x)\, dx, \qquad \forall g, h \in \mathbb{M}^2(\mathbb{R}),$$

onde $\mathbb{M}^2(\mathbb{R})$ designa o conjunto das funções contínuas para as quais existe o integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [g(x)]^2\, dx$.

Sugestão: utilize os polinómios de Hermite.

[**8.1**] Considere o integral

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

(a) Determine o valor aproximado do integral usando a regra dos trapézios composta com

$$M = 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8,$$

subintervalos de integração. Apresente uma tabela com as seguintes colunas:

(i) M.

(ii) $I_1^{(M)}(f)$.

(iii) A estimativa de erro obtida a partir da fórmula de erro

$$E_1^{(M)}(f) = -\frac{b-a}{12}\, h_M^2 f''(\xi), \qquad \xi \in]a,b[.$$

(iv) A estimativa de erro dada pela fórmula

$$\frac{1}{3}\left| I_1^{(M)}(f) - I_1^{(M/2)}(f) \right|.$$

(v) O valor do erro $\left|E_1^{(M)}(f)\right|$ calculado sabendo que o valor exacto do integral é $I = 0.746824132812\ldots$

(vi) O valor do quociente $\left|E_1^{(M)}(f)\right| / \left|E_1^{(M/2)}(f)\right|$.

(b) Repita o exercício (com excepção de (iii)) para o integral

$$\tilde{I} = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx.$$

[**8.2**] Calcule o valor aproximado dos integrais

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx, \qquad \tilde{I} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx,$$

usando as seguintes fórmulas de quadratura:

$$I_1^{(6)}(f), \qquad I_2^{(6)}(f), \qquad I_3^{(6)}(f), \qquad I_6^{(6)}(f) \equiv I_6(f).$$

Determine em cada caso os erros dos valores aproximados a partir dos resultados exactos:

$$I = 0.746824132812\ldots \qquad \tilde{I} = 0.785398163397\ldots.$$

[**8.3**] **(a)** Obtenha a fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 8, a correspondente fórmula composta e os respectivos erros.

(b) Supondo que $f \in \mathcal{P}_{n+\nu_n}$, onde $\nu_n = 1 + \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^n\right]$, mostre que o erro de integração da fórmula de Newton-Cotes de ordem n composta com $2M$ subintervalos, onde M é múltiplo de n, é dado por

$$E_n^{(2M)}(f) = \frac{I_n^{(2M)}(f) - I_n^{(M)}(f)}{2^{n+\nu_n} - 1}.$$

[**8.4**] Deduza as fórmulas de quadratura de Gauss de ordens $n = 0, 1, 2$ para calcular integrais da forma

$$I(f) = \int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx.$$

Sugestão. Utilize os polinómios de Laguerre.

Nota. $I(x^k) = k!, \quad k \in \mathbb{N}_0$.

[10.1] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

onde $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável, I é um intervalo de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, e y_0 é uma constante real.

(a) Obtenha um valor aproximado para $Y(x_0 + h)$ usando dois passos de comprimento $h/2$ do método de Heun.

(b) Obtenha um valor aproximado para $Y(x_0+h)$ usando um passo de comprimento h do método de Taylor de 4ª ordem.

(c) Obtenha um valor aproximado para $Y(x_0+h)$ usando um passo de comprimento h do método de Runge-Kutta clássico de 4ª ordem.

[10.2] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x), \qquad a \leq x \leq b, \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

onde $f \in C([a, b])$ e y_0 é uma constante real. Escrevendo a equação na forma

$$y(x) = y_0 + \int_a^x f(t)\, dt,$$

mostre que:

(i) o método de Euler modificado (ou método do ponto médio) corresponde à aplicação da regra do ponto médio ao integral;

(ii) o método de Heun corresponde à aplicação da regra dos trapézios ao integral;

(iii) o método de Runge-Kutta clássico de 4ª ordem corresponde à aplicação da regra de Simpson ao integral.

[10.3] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \\ y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = z_0, \end{cases}$$

onde $f : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua e Lipschitziana em relação às segunda e terceira variáveis, I é um intervalo de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, e y_0, z_0 são constantes reais.

(a) Obtenha valores aproximados para $Y(x_0 + h)$ e $Y'(x_0 + h)$ usando dois passos de comprimento $h/2$ do método de Euler.

(b) Obtenha valores aproximados para $Y(x_0 + h)$ e $Y'(x_0 + h)$ usando um passo de comprimento h do método de Taylor de $2^{\underline{a}}$ ordem.

(c) Obtenha valores aproximados para $Y(x_0 + h)$ e $Y'(x_0 + h)$ usando um passo de comprimento h do método de Runge-Kutta clássico de $2^{\underline{a}}$ ordem.

(d) Obtenha valores aproximados para $Y(x_0 + 2h)$ e $Y'(x_0 + 2h)$ usando um passo de comprimento h do método preditor-corrector constituído pelos métodos de Adams-Bashforth e Adams-Moulton de $2^{\underline{a}}$ ordem, tomando para valores aproximados para $Y(x_0 + h)$ e $Y'(x_0 + h)$ os valores obtidos em qualquer das alíneas anteriores.

[**10.4**] Determine todos os métodos multipasso lineares estáveis com 3 passos e ordem de convergência 3.