MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

LEFT – LEBL – LQ – LEAM – LEMAT

Ano Lectivo: 2006/2007 Semestre: 2º

Exercícios

4.1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}$$

e o sistema $Ax = b$, com $b = [1 \;\; 10^{-6}]^T$, que tem por solução exacta $x = [1 \;\; 1]^T$.

a) Determine $cond_\infty(A)$.

b) Considere o sistema $A\tilde{x} = \tilde{b}$, onde $\tilde{b} = [1+\epsilon \;\; 10^{-6}]^T$. Obtenha

$$\|\delta_b\|_\infty = \frac{\|b-\tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \qquad \text{e} \qquad \|\delta_x\|_\infty = \frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

c) Considere ainda o sistema $A\bar{x} = \bar{b}$, onde $\bar{b} = [1 \;\; 2\times 10^{-6}]^T$. Obtenha

$$\|\delta_b\|_\infty = \frac{\|b-\bar{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \qquad \text{e} \qquad \|\delta_x\|_\infty = \frac{\|x-\bar{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

4.2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0.00005 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine $cond_1(A)$.

b) Ao resolver um sistema $Ax = b$ com a matriz A, sabendo-se que o segundo membro é afectado por um erro cuja norma, em termos relativos, satisfaz $\|\delta_b\|_1 \le \varepsilon$, determine um majorante da norma correspondente do erro relativo da solução, $\|\delta_x\|_1$.

4.3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Verifique que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+a^2} & 0 & -\dfrac{a}{1+a^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{a}{1+a^2} & 0 & \dfrac{1}{1+a^2} \end{bmatrix}.$$

b) Calcule $cond_\infty(A)$ e $cond_1(A)$.

c) Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ há mau condicionamento da matriz? E se considerar $a \in \mathbb{C}$?

4.4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Suponha que ao resolver o sistema $A\,x = b$, com um certo valor de a, obteve a solução $\tilde{x} = (1, 1, 1)$. Supondo que o valor de a está afectado de um certo erro, de valor absoluto não superior a ε, determine um majorante de $\|\Delta x\|_\infty$, onde Δx é a diferença entre a solução obtida e a que se obteria se fosse conhecido o valor exacto de a.

4.5. Considere um sistema $Ax = b$ em que o segundo membro é dado com um erro relativo $\|\delta_b\|_1 < 0.1$. Sabendo que a matriz é simétrica e que $\|A\|_\infty \leq 7$, $\|A^{-1}\|_1 \leq 1$, determine um majorante para $\|\delta_x\|_\infty$.

4.6. Seja $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ uma matriz com a forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule A^{-1}.

b) Determine $cond_1(A)$ e $cond_\infty(A)$.

c) Sejam b_1 e b_2 dois vectores de $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\frac{\|b_1 - b_2\|_\infty}{\|b_1\|_\infty} \leq 10^{-5}.$$

Sendo x_1 e x_2 as soluções dos sistemas $A\,x = b_1$ e $A\,x = b_2$, respectivamente, determine um majorante de

$$\frac{\|x_1 - x_2\|_\infty}{\|x_1\|_\infty}$$

no caso de $n = 20$. Comente.

4.7. Seja $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ uma matriz com a forma

$$A = \begin{bmatrix} b & a & \cdots & \cdots & a \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calcule $\|A\|_\infty$ e $\|A\|_1$.

b) Sabendo que a inversa de A é uma matriz idêntica a A mas com valores $b' = 1/b$, $a' = -a/b$, calcule $cond_1(A), cond_\infty(A)$ e $cond_*(A)$. Comente.

c) Considere o sistema $Ax = y$. Dado um vector $\tilde{y}$ aproximado de y, com $\|y\|_\infty = 10$, a menos de 10^{-4}, em cada uma das componentes, apresente uma estimativa para um majorante do erro relativo da solução $\tilde{x}$.

d) Seja $a = 1$, $b = 1$, $n < \alpha 10^m$, com $\alpha < 1$. Supondo que $\tilde{A}$ é uma perturbação da matriz A por adição de 10^{-2m} nos seus elementos, determine o mesmo que na alínea c).

4.8. a) Sendo $A, X \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$, A não singular, mostre que

$$\|I - XA\| \leq cond(A)\, \|I - AX\|.$$

b) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8.9999 \end{bmatrix}$$

e a seguinte aproximação para a matriz inversa A^{-1}

$$X = \begin{bmatrix} -10067.2 & 20099.9 & -9952.58 \\ 20132.3 & -40198.9 & 19905.2 \\ -10065.5 & 20099.3 & -9952.58 \end{bmatrix}.$$

Calcule $I - AX$ e $I - XA$. Obtenha uma estimativa para $cond_1(A)$.

4.9. A matriz $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ diz-se *estritamente diagonal dominante* (por linhas) se

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Mostre que uma matriz estritamente diagonal dominante é não-singular.

4.10. Seja $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ uma matriz triangular inferior, não singular. Pretende-se resolver um certo sistema $Ax = b$, partindo de uma aproximação inicial arbitrária.

a) Se aplicarmos o método de Gauss-Seidel, podemos garantir que a solução exacta é obtida com um número finito de iterações. Justifique e diga quantas.

b) A mesma pergunta, em relação ao método de Jacobi.

4.11. Considere o sistema linear $Ax = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

onde $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

a) Mostre que os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para qualquer aproximação inicial $x^{(0)}$ se e só se $|\rho| < 1$, onde $\rho = \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$.

b) Suponha que para ambos os métodos, a convergência está garantida e que existe o limite

$$c_1 = \lim_{k\to\infty} \frac{\|e^{(k+1)}\|_1}{\|e^{(k)}\|_1}.$$

Determine c_1 para cada um dos métodos.

c) Nas condições da alínea b), partindo de uma aproximação inicial arbitrária $x^{(0)}$, quantas iterações é necessário efectuar (utilizando cada um dos métodos) para obter uma aproximação $x^{(k)}$, tal que $\|e^{(k)}\| \leq \varepsilon$?

d) No caso do método de Jacobi, mostre que se a matriz do sistema tiver a diagonal estritamente dominante por linhas, se verifica

$$\|x^{(k+1)} - x\|_\infty \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty$$

onde x é a solução do sistema, $x^{(k)}$ é a k-ésima iterada e $\alpha = \max\left(\dfrac{|a_{12}|}{|a_{11}|}, \dfrac{|a_{21}|}{|a_{22}|}\right)$.

e) Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Efectue a primeira iteração do método de Jacobi, partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = [2 \;\; 1]^T$. Com base na alínea d) determine um majorante do erro do resultado obtido.

4.12. Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Prove que o método de Jacobi converge para a solução exacta deste sistema, qualquer que seja a aproximação inicial.

b) Mostre que, caso utilizar o método de Gauss-Seidel, a convergência depende da aproximação inicial. Indique uma aproximação inicial (diferente da solução exacta) para a qual o método é convergente e uma aproximação inicial para a qual o método é divergente.

4.13. Seja $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e definida positiva.

a) Mostre que o método de Gauss-Seidel converge para a solução do sistema $Ax = b$, qualquer que seja $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

b) Considere o sistema linear $Ax = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique que embora A seja simétrica e definida positiva, o método de Jacobi não converge.

c) Mostre que se, além de $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ ser simétrica e definida positiva, também a matriz $2D - A$, onde $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ é definida positiva, então o método de Jacobi converge para a solução do sistema $Ax = b$, qualquer que seja $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

4.14. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 + \cos\theta \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para a solução do sistema $Ax = b$ (com $b \in \mathbb{R}^3$ qualquer), dado $x^{(0)} = [0 \ \ -212 \ \ 10^5]^T$.

b) Estabeleça uma estimativa de erro para o método de Jacobi, efectuando a primeira iteração com $x^{(0)} = [10^5 \ \ 10^6 \ \ 0]^T$.

c) Ao fim de quantas iterações n é possível garantir um erro $\|e_n\|_\infty \leq 10^{-6}$?

4.15. Considere as matrizes da forma

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & \alpha \\ \beta & -\beta & -\alpha \\ \beta & -\beta & \alpha \end{bmatrix},$$

onde $0 < \beta < \alpha$.

a) Mostre que, qualquer que seja a iterada inicial, o método de Jacobi converge e o de Gauss-Seidel não converge para a solução de um sistema $Ax = b$.

b) Considere $\beta = 1, \alpha = 2$, e $b = [0 \ \ 0 \ \ 0]^T$. A solução única do sistema $Ax = b$ será $x = [0 \ \ 0 \ \ 0]^T$.

(i) Mostre que se começar com $x^{(0)} = [0 \ \ 2 \ \ 1]^T$ ou outro vector qualquer, ao fim de três iterações obtemos a solução exacta pelo método de Jacobi. (Verifique que o raio espectral da matriz C associada ao método de Jacobi é 0).

(ii) Mostre que se começar com $x^{(0)} = [1 \ \ 2 \ \ 1]^T$, aplicando o método de Gauss-Seidel, obtém $x^{(2)} = x^{(1)} = [0 \ \ 2 \ \ 1]^T$. Verifique que esse vector é um vector próprio associado ao valor próprio 1 da matriz C (do método de Gauss-Seidel) e não é solução do sistema.

4.16. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \\ 10 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

a) Reordene as linhas de modo a que matriz do novo sistema tenha a diagonal estritamente dominante.

b) Aplique o método de Jacobi ao novo sistema e efectue 4 iterações. Calcule um majorante para o erro na $4^{\underline{a}}$ iterada. Considere $x^{(0)} = [-4 \quad -4 \quad -4]^T$.

c) Aplique o método de Gauss-Seidel até que $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < 10^{-2}$. Conclua sobre o erro da iterada $x^{(k)}$.

4.17. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -10 \\ 10 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -23 \\ 34 \end{bmatrix}$$

a) É possível reordenar as linhas do sistema de modo que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel sejam convergentes? Justifique.

b) Escreva o sistema na forma iterativa e determine 4 iteradas do método de Gauss-Seidel com $x^{(0)} = [1 \ \ 1 \ \ 1]^T$.

4.18. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique que este sistema pode ser resolvido por um processo iterativo da forma

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Identifique a matriz B e o vector c. Se $x^{(0)} = [0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0]^T$ estime a norma do erro de $x^{(k)}$.

4.19. Pretende-se determinar a solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 2^n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2^n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2^n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n \\ 2^{n-1} \\ \vdots \\ 2^2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para a solução do sistema.

b) Estabeleça uma estimativa de erro para o método de Jacobi, assumindo que $e^{(0)} = [-1 \;\; 2^n \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0]^T$.

c) Comente quanto à rapidez de convergência quando $n \to \infty$.

4.20. Seja $A \in \mathbb{M}^2(\mathbb{R})$ uma matriz tal que os seus valores próprios são complexos:

$$\lambda_{1,2} = a \pm ib.$$

Considere o seguinte método iterativo para a resolução numérica de um sistema linear $Ax = b$, conhecido por *método da iteração simples*:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega(Ax^{(k)} - b), \quad k = 0, 1, \ldots, \qquad x^{(0)} \in \mathbb{R}^2,$$

onde ω é um parâmetro real. Determine:

a) o intervalo de valores de ω, para os quais está garantida a convergência do método;

b) o valor ω_{opt}, para o qual se obtém, em princípio, a maior rapidez de convergência, e o valor correspondente do raio espectral da matriz iteradora do método $C(\omega) = I - \omega A$.

4.21. Considere o sistema linear $Ax = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Sabendo que os valores próprios de A satisfazem $\lambda_i \in [5-\sqrt{3}, 5+\sqrt{3}], i = 1, \ldots, 5$, determine os valores de ω para os quais o método iterativo

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega(Ax^{(k)} - b), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

converge para x qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)}$.

b) Seja $\omega = 0.2$. Partindo de $x^{(0)} = [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]^T$, calcule as três primeiras iteradas pelo método da alínea a). Estime o erro da iterada $x^{(3)}$ na norma $\| \cdot \|_\infty$.

4.22. Considere o sistema linear $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \omega & 0 \\ 1 & 2 & 2\omega \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde $\omega \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que tanto o método iterativo de Jacobi como o de Gauss-Seidel convergem para a solução deste sistema, qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, se e só se $|\omega| < \frac{4}{3}$. Prove também que o método de Gauss-Seidel converge mais rapidamente, desde que $\omega \neq 0$. Como é que os dois métodos convergem quando $\omega = 0$?

b) Seja $\omega = \frac{1}{2}$ e $x^{(0)} = [0\ \ 0\ \ 0]^T$. Calcule as três primeiras iteradas pelo método de Gauss-Seidel. Obtenha uma estimativa para o erro $\|x - x^{(3)}\|_\infty$.

c) Determine os valores de ω para os quais a matriz A é definida positiva.

4.23. O sistema de equações lineares,

$$\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix} x = b$$

pode, sob certas condições, ser resolvido pelo método iterativo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega a & 1 \end{bmatrix} x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1-\omega & \omega a \\ 0 & 1-\omega \end{bmatrix} x^{(k)} + \omega b$$

a) Para que valores de a o método converge se $\omega = 1$?

b) Será que o método converge para $a = -\frac{1}{2}$ e $\omega = \frac{1}{2}$?

4.24. a) Mostre que a condição $\omega \in (0,2)$ é necessária para que o método das relaxações sucessivas convirja para a solução do sistema $Ax = b$.

b) Prove que, se $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ for simétrica e definida positiva, então a condição $\omega \in (0,2)$ é suficiente.

4.25. Seja $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ uma matriz não-singular e seja $C \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ uma aproximação de A^{-1}. Considere o seguinte método iterativo para a resolução numérica do sistema linear $Ax = b$, conhecido por *método de correcção residual*:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + Cr^{(k)}, & k = 0,1,\dots \\ r^{(k)} = b - Ax^{(k)}, & k = 0,1,\dots \\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

a) Mostre que se $\|I - CA\| < 1$, então o método converge para x qualquer que seja $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

b) Seja $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon B$, com

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $0 < \varepsilon \ll 1$. Aproxime a solução do sistema $A(\varepsilon)x = b$, com $b = [1\ 1\ 1]^T$ e $\varepsilon = 10^{-4}$ pelo método de correcção residual com um erro inferior a 10^{-5}. Tome $C = A_0^{-1}$, isto é,

$$C = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

4.26. Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Compare as dez primeiras iteradas dos métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel, partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = [0\ \ 0]^T$

4.27. Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 0.96326 & 0.81321 \\ 0.81321 & 0.68654 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.88824 \\ 0.74988 \end{bmatrix}.$$

Aplique o método de Gauss-Seidel a este sistema partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = [0.33116\ \ 0.70000]^T$.