MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

LEFT – LEBL – LQ – LEAM – LEMAT

Ano Lectivo: 2006/2007 Semestre: 2º

Exercícios

3.1. Para calcular a menor raiz positiva da equação

$$x^2 - 101x + 1 = 0,$$

considere as fórmulas

$$x = \frac{101 - \sqrt{101^2 - 4}}{2}, \qquad x = \frac{2}{101 + \sqrt{101^2 - 4}},$$

e ainda o método iterativo

$$x_0 = 0, \qquad x_{m+1} = \frac{x_m^2 + 1}{101}, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

Use cada um dos referidos métodos e comente a precisão dos resultados obtidos sabendo que o valor da raiz é 0.0099019608794976148...

3.2. Use o método da bissecção para aproximar a raiz da equação

$$e^x - \sin x = 0,$$

mais próxima de zero.

3.3. Considere a equação

$$\sin x - e^{-x} = 0.$$

a) Prove que esta equação tem uma raiz $z \in [0.5, 0.7]$.

b) Efectue uma iteração pelo método da bissecção e indique um novo intervalo que contenha z.

c) Determine o número m de iterações necessárias para garantir $|z - x_m| < 10^{-6}$.

3.4. Considere a equação

$$3x^2 - e^x = 0.$$

a) Localize graficamente as raízes da equação e indique intervalos de comprimento unitário que as contenham.

b) Considere a seguintes sucessões

$$\text{(S1)} \ \ x_{m+1} = \sqrt{\frac{e^{x_m}}{3}}; \qquad \text{(S2)} \ \ x_{m+1} = \ln(3x_m^2).$$

Mostre que é possível obter aproximações das raízes positivas da equação usando, para cada raiz, uma dessas sucessões. Indique, em cada caso, um intervalo onde poderá escolher a iterada inicial x_0.

c) Efectue duas iterações usando a sucessão (S1) com $x_0 = 1$. Estime o número de algarismos significativos da aproximação obtida.

d) Será possível usar a sucessão (S1) para aproximar a maior raiz positiva da equação? E poderá usar a sucessão (S2) para aproximar a menor raiz positiva da equação?

e) Determine uma função iteradora g tal que o método do ponto fixo associado convirja para a raiz negativa da equação.

3.5. Considere uma sucessão de números reais, definida do seguinte modo:

$$x_0 = 1, \qquad x_{m+1} = 1 - \frac{1}{bx_m}, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

onde b é um número real dado.

a) Com base no teorema do ponto fixo, mostre que se $b > 4$ esta sucessão converge e que todos os seus termos estão compreendidos no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

b) Considere $b = \frac{25}{4}$. Usando a definição de ponto fixo, calcule $z = \lim_{m\to\infty} x_m$.

c) Para o mesmo valor de b, mostre que todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo $\left[\frac{4}{5}, 1\right]$ e que se verifica

$$|z - x_{m+1}| \leq \frac{4}{75}\left(\frac{1}{4}\right)^m, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

3.6. Considere a função

$$g(x) = \frac{1}{3}\ln(x^2 + 1).$$

a) Prove que a sucessão definida por $x_{m+1} = g(x_m)$, $m = 0, 1, \ldots$, converge para um número $z \in [-1, 1]$, qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Determine z e a ordem de convergência.

b) Efectue algumas iterações, começando com $x_0 = 5$, e calcule os quocientes

$$\frac{|e_1|}{(e_0)^2}, \quad \frac{|e_2|}{(e_1)^2}, \quad \frac{|e_3|}{(e_2)^2}, \ldots$$

Os resultados parecem estar de acordo com o que provou na alínea anterior?

3.7. A equação $x^2 = a$, com $a > 0$, pode escrever-se sob a forma $x = g(x)$, onde $g(x) = a/x$. Considere o método do ponto fixo para aproximar a raiz positiva da equação. Mostre que o método é divergente qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \neq \sqrt{a}$.

3.8. Considere a função

$$g(x) = \frac{1 + e^x + x^3}{14}.$$

a) Sendo $\{x_m\}$ a sucessão numérica definida por $x_{m+1} = g(x_m)$, $m = 0, 1, \ldots$, mostre que esta sucessão tem um limite finito $z \in [0, 1]$, qualquer que seja $x_0 \in [0, 1]$.

b) Verifique que a função g tem um (único) ponto fixo no intervalo [2,3]. Poderá usar, para a sua determinação, o método iterativo baseado na função iteradora g?

3.9. Pretende-se determinar uma raiz da equação $x = g(x)$ pelo método do ponto fixo com um erro absoluto inferior a 0.5×10^{-4}. Suponha que foram obtidas as iteradas

$$x_4 = 0.43789, \qquad x_5 = 0.43814.$$

Sabendo que $|g'(x)| \leq 0.4$, determine o número de iterações que tem ainda de se efectuar até atingir a precisão pretendida.

3.10. Considere a equação

$$e^x - 4x^2 = 0.$$

a) Mostre que a equação tem apenas três raízes reais, $z_1 < z_2 < z_3$, tais que $z_1 \in [-1, 0]$, $z_2 \in [0, 1]$ e $z_3 \in [4, 5]$.

b) Para aproximar as raízes positivas da equação, considere-se o método do ponto fixo com função iteradora

$$g(x) = \frac{1}{2}\, e^{x/2}.$$

(i) Mostre que z_2 e z_3 são pontos fixos de g.

(ii) Mostre que o método iterativo associado a g converge para z_2, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [0, 1]$.

(iii) Mostre que não é possível usar esse método para obter uma aproximação da raiz $z_3 \in [4, 5]$.

c) Considere o método de Newton para aproximar a raiz $z_3 \in [4, 5]$ da equação.

(i) Prove que está assegurada a convergência do método de Newton, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [4.1, 4.4]$. Determine ainda a ordem de convergência do método.

(ii) Partindo de $x_0 = 4.1$, calcule x_1. Sem efectuar mais iterações, determine um majorante para $|z_3 - x_2|$.

3.11. Considere a iteração do ponto fixo $x_{m+1} = g(x_m)$, $m = 0, 1, \ldots$, com as funções iteradoras

$$g_1(x) = 1 + \operatorname{arctg}(x), \qquad g_2(x) = \frac{x(x^2+6)}{3x^2+2}.$$

a) Para cada um dos pontos fixos de g_1 e de g_2 procure um intervalo em que as condições do teorema do ponto fixo sejam válidas.

b) Aproxime os pontos fixos de g_1 e de g_2 com um erro inferior a 10^{-6}. Determine a ordem da convergência para cada uma das iterações?

3.12. Considere a função

$$f(x) = 2\ln(x^2+1) - x^2 + \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Aproxime, com um erro inferior a 10^{-4}, todas as raizes da equação $f(x) = 0$.

3.13. a) Determine, com um erro inferior a 10^{-4}, o valor mínimo de $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$a\sqrt{x} \geq \sin x, \qquad \forall\, x \geq 0.$$

b) Sendo $g \in C^1(\mathbb{R})$ uma função tal que $g(x) \leq g(\mu) = \gamma$, $\forall x \in \mathbb{R}$, considere o método iterativo

$$x_0 \in \mathbb{R}, \qquad\qquad x_{m+1} = \mu + g(x_m) - \gamma, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

Mostre que o método acima converge para μ desde que x_0 esteja suficientemente próximo de μ. Determine a ordem da convergência.

3.14. Considere o seguinte método iterativo

$$x_0 \in \mathbb{R}, \qquad\qquad x_{m+1} = \frac{\alpha x_m + 1 + 2e^{-x_m}}{2+\alpha}, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

a) Mostre que para todo o $\alpha \in [0,1]$ o método converge para a solução da equação

$$f(x) = e^x - 2xe^x + 2 = 0,$$

qualquer que seja $x_0 \geq 0$.
Sugestão: Utilize o teorema do ponto fixo no intervalo $[0, \max\{2, x_0\}]$.

b) Determine o valor de α de tal modo que a convergência seja a mais rápida possível.

c) Aplique o método para aproximar a solução da equação $f(x) = 0$ com um erro inferior a 10^{-5}.

3.15. Pretende-se determinar um valor x que verifique a equação

$$\cos(x) = -\cos(x + a\cos(x)).$$

a) Mostre que se $a \neq 0$ isso é equivalente a encontrar $z = g(g(z))$, com

$$g(x) = x + a\cos(x),$$

e que se $a = 1$, g tem um único ponto fixo no intervalo $I = [1,3]$. Justifique que para $a = 1$ a solução da equação é única em I e coincide com o ponto fixo de g.

b) Considere os valores de a). Calcule duas iterações pelo método do ponto fixo aplicado à função g começando com $x_0 = \pi/2$ e com $x_0 = 1$. O que pode concluir?

Calcule o valor exacto do erro $|e_2|$ com 8 dígitos correctos, quando começa com $x_0 = 1$. Mostre que a ordem de convergência local é cúbica.

c) Considere os valores de a). Começando com $z_0 = 1$, e sendo $z_m = g(z_{m-1})$, considere os pontos (x_m, y_m) com $x_m = \log|z - z_m|$ e $y_m = \log|z - z_{m+1}|$, onde z é o ponto fixo de g. Quando $m \to \infty$ os pontos (x_m, y_m) irão aproximar-se de uma recta $y = \alpha x + \beta$. Determine os valores dos coeficientes α e β.

3.16. Mostre que, para $a > b \geq 1$, a sucessão

$$x_0 = 1, \qquad x_{m+1} = a + \frac{b}{x_m}, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

converge alternadamente para a solução da equação $x^2 - ax - b = 0$ que se encontra no intervalo $[a, a + b]$.

<u>Nota.</u> Esta sucessão define aquilo que se designa por *fracção contínua*, ou seja,

$$x = a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{\ddots}}}$$

no caso particular em que $a_m = a, b_m = b$.

3.17. Seja g uma função contínua tal que $g(a) = b$ e $g(b) = a$.

a) Mostre que existe pelo menos um ponto fixo de g em $[a, b]$.

b) Mostre que se $g \in C^1([a, b])$ então a derivada de g toma o valor -1 em algum ponto desse intervalo. O que pode concluir quanto à contractividade de g nesse intervalo?

3.18. Considere $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$ uma equação em $\mathbb{R}$ que tem pelo menos duas raízes z_1 e z_2 consecutivas (ou seja, não existe nenhuma outra raiz entre elas).

a) Mostre que se $g \in C^1(\mathbb{R})$ e $|g'(z_1)| < 1$ então $g'(z_2) \geq 1$.

b) Suponha que $z_2 \in I = [a, b]$, que $|g'(x)| > 1$, $\forall x \in I$ e que $I \subseteq g(I)$. Mostre que o método $x_{m+1} = g^{-1}(x_m)$ converge para z_2 qualquer que seja $x_0 \in I$.

c) Seja $f \in C^p(\mathbb{R})$, tal que a raiz z_2 tem multiplicidade $p \geq 1$, e seja g tal que $g'(z_2) > 1$. Indique uma função iteradora que assegure uma convergência local linear para z_2, e uma outra que assegure convergência quadrática, para cada caso de p.

3.19. Ao utilizar o método do ponto fixo para determinar uma raiz de uma equação, foram obtidos os valores

$$x_3 = -0.914260304, \qquad x_4 = -0.825329540,$$
$$x_5 = -0.884002249, \qquad x_6 = -0.847330076.$$

a) Sabendo que a função iteradora era um polinómio do quarto grau, da forma $p(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$, determine aproximadamente as duas raízes reais da equação.

b) Determine os valores possíveis para x_2.

c) Determine uma estimativa para a majoração do erro absoluto em x_{20}.

3.20. Considere um intervalo $I = [a, b]$ que tem um único ponto fixo z de uma função $g \in C^1(I)$. Seja $g'(z) = 1$.

a) Mostre que se $0 < g'(x) < 1, \forall x \in I \backslash \{z\}$, então o método do ponto fixo converge qualquer que seja $x_0 \in I$.
Sugestão: Verifique que a sucessão definida pelo método do ponto fixo é estritamente monótona e limitada.

b) Aplique este resultado para mostrar que $x_{m+1} = \sin(x_m)$ converge para 0, qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$.

3.21. Utilize o método de Newton para aproximar a (única) raiz da equação

$$x^3 - \cos x - 1 = 0,$$

no intervalo [1, 2]. Escolha o valor $x_0 = 1$ para iterada inicial e calcule as iteradas x_1 e x_2. Que tipo de convergência se tem? Indique uma estimativa para o erro absoluto de x_3.

3.22. Pretende-se determinar, utilizando o método de Newton, a maior das duas raízes positivas da equação

$$-x^3 + 14x - 1 - e^x = 0.$$

a) Mostre que se x_0 for escolhido no intervalo [2.6, 3] estão asseguradas as condições de convergência do método.

b) Calcule um majorante para o erro da segunda iterada (não efectue iterações).

3.23. Considere os seguintes métodos para obter um valor aproximado de $\sqrt{10}$:

a) Método de Newton aplicado à função $f(x) = x^2 - 10$. Mostre que se escolher $x_0 = 4$ então o método de Newton converge e a ordem é dois (note que pode concluir convergência se escolher para x_0 qualquer valor ≥ 4). Calcule três iteradas e determine um majorante para o erro de x_3. Quantos algarismos significativos pode garantir?

b) Método de Newton aplicado à função $f(x) = x^{-1/2}(x^2 - 10)$. Admitindo que o método converge, mostre que a ordem de convergência é 3.

3.24. Mostre que a equação

$$\ln x - (x - 2)^2 = 0,$$

tem duas e só duas raízes reais distintas e indique, para cada uma delas, um intervalo (de comprimento não superior a 2) que a contenha (sem conter a outra). Se pretendesse utilizar o método de Newton para calcular a raiz mais pequena, diga, justificando, qual (ou quais) dos seguintes valores poderia utilizar como aproximação inicial: $x_0 = 2.1$,

$x_0 = 2.5$ ou $x_0 = 1.4$. Mostre que para o x_0 que escolheu estão garantidas as condições de convergência e efectue uma iteração.

3.25. Para calcular a raiz quadrada do número $a > 0$ recorre-se frequentemente ao método iterativo

$$x_0 \in \mathbb{R}, \qquad x_{m+1} = \frac{1}{2}(x_m + \frac{a}{x_m}), \qquad m = 0, 1, \ldots$$

a) Verifique que esta fórmula corresponde à utilização do método de Newton para resolver o problema.

b) Mostre que o erro do método satisfaz a condição

$$e_{m+1} = -\frac{e_m^2}{2x_m},$$

onde $e_m = z - x_m$.

3.26. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^4. Considere a seguinte modificação do método de Newton para a aproximação dos zeros de f:

$$x_0 \in \mathbb{R}, \qquad x_{m+1} = x_m - \frac{\Phi(x_m)}{\Phi'(x_m)}, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

onde $\Phi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Mostre que o método tem ordem de convergência quadrática também no caso em que os zeros de f são múltiplos.

3.27. O método iterativo

$$x_0 = 1, \qquad x_{m+1} = \frac{p-1}{p} x_m + \frac{a}{p x_m^{p-1}}, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

permite obter em poucas iteradas uma boa aproximação de $\sqrt[p]{a}$, onde $p, a > 1$. Escolha um intervalo adequado em que estejam satisfeitas as condições suficientes para a convergência do método de Newton. Calcule uma aproximação de $\sqrt[3]{231}$ garantindo um erro absoluto inferior a 10^{-3}.

Nota. É claro que a aproximação inicial $x_0 = 1$ não é boa e pode ser melhorada, por exemplo, considerando $x_0 = 1 + \frac{a}{p}$, ou simplesmente encontrando um x_0 tal que $x_0^p < a < (x_0 + 1)^p$. (Para $\sqrt[3]{231}$ bastaria reparar que $6^3 = 216 < 231 < 343 = 7^3$ e considerar $x_0 = 6$).

Uma utilidade deste resultado é a de permitir calcular aproximações de raízes de ordem p utilizando apenas operações elementares (por exemplo, quando estamos na posse de uma calculadora rudimentar que não calcula raízes!).

Acontece, por vezes, que as raízes calculadas pela máquina aparecem só em precisão simples, podendo servir esse valor como aproximação inicial para este método iterativo, que ao fim de muito poucas iterações (normalmente 1 ou 2) garante todos os dígitos em precisão dupla, ou mesmo superior!

3.28. Considere a função

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - x.$$

a) Mostre que o método de Newton converge quadraticamente para o único zero de f, qualquer que seja a iterada em $[0.5, 1.5]$.

b) Calcule a primeira iterada x_1 começando com $x_0 = 1$ e justifique que $|e_1| \leq 0.025$.

c) Calcule x_3 e apresente uma estimativa de erro.

d) Com base nos valores x_0 e x_1 obtido em b) calcule x_2 pelo método da secante. Este método também irá convergir?

3.29. Considere a equação

$$f(x) = x\tan(x) - 1 = 0.$$

Aplicando o método da secante, obtenha as três primeiras iteradas para o cálculo da raiz situada no intervalo $[0.8, 0.9]$. Determine um majorante do erro do resultado obtido.

3.30. Considere a equação

$$e^x + x^2 - 2 = 0.$$

a) Prove que a equação tem uma única raiz no intervalo $]0.5,\ 1.0[$. Por bissecção determine um sub-intervalo I daquele intervalo que contenha a raiz.

b) Escolha duas iteradas iniciais x_{-1} e x_0 de modo a que se possa aplicar o método da secante para aproximar a raiz em I e calcule a iterada seguinte x_1.

c) Indique uma majoração do erro absoluto da iterada x_2 que tenha em conta os valores encontrados na alínea anterior.

3.31. Para obter um valor aproximado da raiz cúbica de um número real a, pretende-se utilizar o método da secante.

a) Escreva a fórmula iteradora do método para um valor de a arbitrário.

b) Considere o caso de $a = 2$. Tomando como aproximações iniciais $x_0 = 1, x_1 = 2$, verifique que as condições de convergência do método estão satisfeitas e efectue iterações até obter uma aproximação com três algarismos significativos.

3.32. Sabendo que $h \in C^2(I)$ e $h' \in C^1(I)$ são funções crescentes, e que h tem uma raiz no intervalo $I = [-1, 1]$, pretende-se determinar a raiz da equação

$$f(x) = x + h(x) = 0,$$

usando o método

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \qquad x_{m+1} = x_m - \frac{(x_m - x_{m-1})f(x_m)}{f(x_m) - f(x_{m-1})}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Verifique que f tem uma raiz única em I e que existem valores a, $b \in I$ para os quais o método converge. Que pode dizer relativamente à ordem de convergência?

3.33. Tente localizar os zeros do polinómio

$$p(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1,$$

no intervalo [0.975, 1.035] estudando as mudanças de sinal ocorridas em pontos distanciados de 0.001. Não utilize a simplificação

$$p(x) = (x-1)^4,$$

que fornece imediatamente a única raiz do polinómio.

3.34. Construa uma tabela com valores de y para os valores de $x = 0.0, 0.1, 0.2, \ldots, 1.0$, onde y é definido implicitamente em função de x pela expressão

$$3x^7 + 2y^5 - x^3 + y^3 = 3,$$

utilizando o método de Newton.

3.35. A equação

$$e^{-x} - \sin(7x) = 0,$$

possui uma única raiz no intervalo [0.5, 1.0]. Compare as iteradas obtidas pelo método da bissecção e pelo método da secante com iteradas iniciais $x_0 = 0.5, x_1 = 1.0$.