INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

LEFT – LEBL – LQ – LEAM – LEMAT

Ano Lectivo: 2006/2007 Semestre: 2º

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Exercícios

2.1. Seja N uma norma num espaço vectorial E. Mostre que

$$\|x-y\|_N \geq |\|x\|_N - \|y\|_N|, \qquad \forall x, y \in E.$$

2.2. Sendo $x \in \mathbb{C}^n$ mostre que:

(a) $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$; **(b)** $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty$;

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$; **(d)** $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$;

(e) $\dfrac{1}{n}\,\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_1$; **(f)** $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\|x\|_2 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2$.

2.3. Sendo $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ mostre que:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\|A\|_2 \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2$; **(b)** $\dfrac{1}{n}\,\|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq n\,\|A\|_\infty$;

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|A\|_1$; **(d)** $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|A\|_\infty$;

(e) $\dfrac{1}{n}\,\|A\|_1 \leq \|A\|_\infty \leq n\,\|A\|_1$; **(f)** $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\|A\|_2 \leq \|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2$.

2.4. Mostre que a norma matricial associada à norma da soma em $\mathbb{C}^n$ tem a forma

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$

onde $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$.

2.5. Mostre que a norma matricial associada à norma do máximo em $\mathbb{C}^n$ tem a forma

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

onde $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$.

2.6. Mostre que a norma matricial associada à norma euclidiana em $\mathbb{C}^n$ tem a forma

$$\|A\|_2 = \sqrt{r_\sigma(A^*A)},$$

onde $A = \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ e A^* é a matriz tranposta conjugada de A.

2.7. Seja $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$. Supondo que são conhecidos os valores próprios de A, determine:

a) os valores próprios de A^{-1} (admitindo que A é invertível);

b) os valores próprios de A^m, $m = 1, 2, \ldots$;

c) os valores próprios de $A + c\,I$, onde c é uma constante.

2.8. Sendo $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ uma matriz hermiteana, isto é, uma matriz tal que $A^* = A$, mostre que $\|A\|_2 = r_\sigma(A)$.

2.9. Seja $U \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ uma matriz unitária, isto é, uma matriz tal que $UU^* = U^*U = I$. Mostre que:

a) Os valores próprios de U têm módulo um.

b) $\|U\|_2 = 1 = r_\sigma(U)$.

2.10. Seja $A, B, U \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$, U unitária. Mostre que:

a) As matrizes A e U^*AU têm os mesmos valores próprios.

b) $\|B\|_2 = \|UB\|_2 = \|BU\|_2$.

2.11. Considere a norma de Frobenius, definida para qualquer $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ por

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Mostre que:

a) se $A, B \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ então

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F;$$

b) se $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ e $x \in \mathbb{C}^n$ então

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2;$$

c) se $A, U \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ e U é unitária então

$$\|AU\|_F = \|UA\|_F = \|A\|_F;$$

d) se $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ é hermitiana então

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2},$$

onde λ_i, $i = 1, \ldots, n$, são os valores próprios de A;

e) se $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ é hermitiana então

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F.$$

2.12. Seja M uma norma matricial associada a uma certa norma vectorial V. Mostre que:

a) $\|I\|_M = 1$, onde I é a matriz identidade;

b) se A é invertível, então

$$\|A^{-1}\|_M \geq \frac{1}{\|A\|_M}.$$

2.13. Mostre que a norma de Frobenius não está associada a nenhuma norma vectorial.

2.14. Seja $Q \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ uma matriz não singular.

a) Mostre que a função $V(x) = \|Q^{-1}x\|_\infty$ define uma norma no espaço vectorial $\mathbb{C}^n$.

b) Verifique que a norma matricial M associada à norma V da alínea a) tem a seguinte expressão:

$$\|A\|_M = \|Q^{-1} A\, Q\|_\infty$$

2.15. Seja $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ uma matriz tal que $\|A\| < 1$ para alguma norma matricial associada a uma norma vectorial em $\mathbb{C}^n$. Prove que a matriz $I - A$ é não singular e que

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}\,.$$

2.16. Sendo $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ determine a ordem de convergência das sucessões com o seguinte termo geral:

a) $u_n = 1 + \dfrac{1}{n^a}$; **b)** $v_n = 1 + \dfrac{1}{a^n}$;

c) $x_n = 1 + \dfrac{1}{a^{b^n}}$; **d)** $y_n = 1 + \dfrac{1}{a^{b^{n^2}}}$;

e) $w_n = 1 + \dfrac{2 + (-1)^n}{4^n}$.

2.17. Determinar a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x_{m+2} - x_{m+1} - x_m = 0, & m \geq 0, \\ x_0 = x_1 = 1. \end{cases}$$

Esta solução é conhecida como **sucessão de Fibonacci**. Mostre que

$$\lim_{m \to \infty} \frac{x_{m+1}}{x_m} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

2.18. Determinar a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x_{m+3} - 8x_{m+2} + 20x_{m+1} - 16x_m = 0, & m \geq 0 \\ x_0 = 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -4. \end{cases}$$

2.19. Determinar a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x_{m+2} = \dfrac{13}{3}\, x_{m+1} - \dfrac{4}{3}\, x_m, & m \geq 0, \\ x_0 = \alpha, \quad x_1 = \beta, \end{cases}$$

onde α, β são números reais. Particularize para os seguintes casos:

a) $\beta = \dfrac{\alpha}{3} + \varepsilon$; **b)** $\beta = 4\alpha + \varepsilon$.

ε é um número real.