INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
LEFT – LEBL – LQ – LEAM – LEMAT
Ano Lectivo: 2006/2007

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Exame de 17 de Julho de 2007

Duração: 3 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[1]^{20} Considere o seguinte algoritmo para o cálculo da função seno hiperbólico num ponto $x \in \mathbb{R}$:

$$z_1 = e^x, \qquad z_2 = e^{-x}, \qquad z_3 = z_1 - z_2, \qquad z = \sinh x = \frac{z_3}{2}.$$

Supondo que é apenas conhecido um valor aproximado $\tilde{x}$ de x e que as quatro operações envolvidas no cálculo de z, exponenciação (duas vezes), subtracção e divisão por 2, têm erros de arredondamento $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$, determine a expressão do erro relativo do valor aproximado $\tilde{z}$ de z. Utilize o resultado para concluir que o cálculo de $\sinh x$ é um problema bem posto para qualquer $x \in \mathbb{R}$ mas que o algoritmo para o seu cálculo é numéricamente instável para $x \approx 0$.

[2] Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2 - 1 - \sin x.$$

(a)^{15} Mostre que a função f tem dois e só dois zeros reais, w e z, tais que

$$w \in [-0.8, -0.6], \qquad z \in [1.3, 1.5].$$

(b)^{20} Mostre que o método do ponto fixo com função iteradora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = x - 0.6 f(x),$$

converge para z para qualquer iterada inicial $x_0 \in [1.3, 1.5]$.

(c)^{15} Considere o método do ponto fixo com a função iteradora g da alínea anterior e iterada inicial $x_0 = 1.4$. Determine M tal que $|z - x_m| \leq 10^{-6}, \ \forall m \geq M$.

(d)^{10} Mostre que o método do ponto fixo com a função iteradora g das alíneas anteriores não pode convergir para a raiz w.

[3] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $y \in C^3(\mathbb{R})$:

i	0	1	2	3
x_i	0.0	0.2	0.4	0.6
$y(x_i)$	21.0	17,5	15.0	13.125

(a)^{15} Determine o polinómio interpolador de y, q_2, nos três últimos pontos da tabela usando a fórmula de interpolação de Lagrange.

(b)^{15} Determine o polinómio interpolador de y, p_2, nos três primeiros pontos da tabela usando a fórmula de interpolação de Newton.

(c)^{20} Sabendo que é válida a igualdade

$$y'(x) = -\frac{1}{21}\,[y(x)]^2, \qquad \forall x \geq 0,$$

determine um majorante para o erro de interpolação $|y(x) - p_2(x)|$ válido para todos os valores de $x \in [0.0, 0.4]$. Não integre a equação diferencial satisfeita por y.

(d)^{20} Determine os valores das constantes a e b que minimizam o erro quadrático médio

$$E(a,b) = \sum_{i=0}^{3} \left[\frac{1}{y(x_i)} - a - bx_i \right]^2 .$$

[**4**] Considere o sistema de duas equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem,

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + \cos(\pi t) + y(t)[y(t)z(t) - 2], \\ z'(t) = y(t)[1 - y(t)z(t)], \end{cases} \qquad t \geq 0,$$

sujeito às condições iniciais, $y(0) = 1,\ z(0) = 1$.

(a)^{15} Obtenha valores aproximados (y_2, z_2) para $(y(2h), z(2h))$, usando dois passos do método de Euler com passo de integração $h > 0$.

(b)^{15} Obtenha valores aproximados $(\tilde{y}_1, \tilde{z}_1)$ para $(y(2h), z(2h))$, usando um passo do método de Euler modificado com passo de integração $2h > 0$.

[**5**]^{20} Demonstre que o erro de discretização local para o método de Adams-Bashforth de ordem 2 $(p = 1, q = 2)$ tem a forma

$$\tau(x, y; h) = \frac{5h^2}{12}\,(d^2 f)(x, y) + \mathcal{O}(h^3), \qquad h \to 0.$$

Admita que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^2.

17.JUL.2007