INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
LEFT – LEBL – LQ – LEAM – LEMAT
Ano Lectivo: 2006/2007

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Exame de 3 de Julho de 2007

Duração: 3 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[1] Considere a equação

$$f(x) := x - 0.075 \sin x - 1.68 = 0.$$

(a)[20] Verifique as condições suficientes de convergência do método de Newton para a única raiz z de f no intervalo $[1.7,\ 1.8]$.

(b)[20] Determine um valor aproximado x_2 da raiz z usando duas iteradas do método de Newton com condição inicial $x_0 = 1.8$ e obtenha um majorante do erro absoluto $|z - x_2|$.

[2][30] Considere o sistema de equações lineares $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Determine um valor aproximado $x^{(2)}$ da solução x do sistema $Ax = b$ usando duas iteradas do método de Gauss-Seidel com condição inicial $x^{(0)} = 0$. Sabendo que $\|C_{GS}\|_\infty \leq \frac{1}{3}$, onde C_{GS} é a matriz de iteração do método de Gauss-Seidel, obtenha um majorante do erro absoluto $\|x - x^{(2)}\|_\infty$.

[3] Pretende aproximar-se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \exp(x^2)$ no intervalo $[0, 1]$ por uma função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $\phi(x) = a + bx^3$ onde a, b são escolhidos por forma a minimizar o integral

$$E(a, b) = \int_0^1 [f(x) - \phi(x)]^2 \, dx.$$

(a)[20] Mostre que os valores a^*, b^* que minimizam $E(a, b)$ são as componentes do vector y, solução do sistema linear $Ay = w$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}, \qquad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 f(x)\, dx \\ \int_0^1 x^3 f(x)\, dx \end{bmatrix}.$$

(b)[25] Determine valores aproximados $\tilde{w}_1$ e $\tilde{w}_2$ para os integrais w_1 e w_2 usando a fórmula do trapézios composta com 4 subintervalos e obtenha majorantes dos erros absolutos $|w_1 - \tilde{w}_1|$ e $|w_2 - \tilde{w}_2|$.

Nota: Pode utilizar os resultados

$$f''(x) = 2(1 + 2x^2)\exp(x^2), \qquad [x^3 f(x)]'' = x(3 + x^2)f''(x).$$

(c)[20] Sendo

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.250 \\ 0.250 & 0.143 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{w} = \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \end{bmatrix},$$

obtenha um majorante do erro relativo da solução $\tilde{y}$ do sistema $\tilde{A}\tilde{y} = \tilde{w}$ em relação à solução y do sistema $Ay = w$. Use a norma do máximo e a norma matricial associada. Não resolva qualquer dos sistemas.

[**4**] Considere o integral

$$I(f) = \int_{-2}^{2} |x| f(x)\, dx,$$

para qualquer $f \in C([-2, 2])$.

(a)[20] Determine a fórmula de quadratura de Gauss com dois nós de integração que aproxima o integral $I(f)$.

(b)[15] Diga justificadamente qual o grau de precisão da fórmula assim obtida.

[**5**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = x \sin y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

(a)[10] Obtenha um valor aproximado y_1 para $y(h)$, onde $h > 0$ é o passo de integração, usando o método de Taylor de 2ª ordem.

(b)[10] Obtenha um valor aproximado $\tilde{y}_1$ para $y(h)$, onde $h > 0$ é o passo de integração, usando o método de Runge-Kutta clássico de 2ª ordem.

(c)[10] Obtenha uma equação para o valor aproximado $\hat{y}_2$ para $y(2h)$, onde $h > 0$ é o passo de integração, usando o método de Adams-Moulton de ordem 3 ($p = 1$) com condições iniciais $\hat{y}_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\hat{y}_1 = \frac{1}{2}(\pi + h^2)$.

$\boxed{\text{3.JUL.2007}}$