INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2005/2006

ANÁLISE NUMÉRICA

Exercícios

5.1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	1	16

(a) Determine o polinómio interpolador de f, p_3, nos pontos da tabela pela fórmula de Lagrange.

(b) Determine o polinómio interpolador de f, p_3, nos pontos da tabela pela fórmula de Newton às diferenças divididas.

(c) Mostre que

$$\max_{x\in[-1,2]} \left| x(x-2)(x^2-1) \right| = 1.$$

Sugestão: Introduza a mudança de variável $x = \theta + \frac{1}{2}$.

(d) Sabendo que $|f^{(4)}(x)| \leq 25, \quad \forall x \in [-1,2]$, obtenha um majorante para o erro

$$e_3(x) = f(x) - p_3(x),$$

válido para todos os valores de $x \in [-1,2]$.

(e) Sabendo que $f[1,2,3] = 25$ determine o polinómio interpolador de f, p_4, nos pontos $-1, 0, 1, 2, 3$.

(f) Sabendo que f é um polinómio de grau 5 com quinta derivada positiva utilize toda a informação disponível para obter a sua forma.

5.2. Seja $f \in C^1([a,b])$ tal que $f(a)f(b) < 0$ e $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$; logo existe um único $z \in]a,b[$ tal que $f(z) = 0$.

(a) Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n,\ n+1$ pontos distintos de $[a,b]$ e sejam $y_0, y_1, \ldots, y_n$ os valores de f nesses pontos, isto é, $y_j = f(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Escreva uma expressão para o polinómio $q_n \in \mathcal{P}_n$ que interpola f^{-1} nos nós $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

(b) Notando que $z = f^{-1}(0)$, utilize o polinómio q_3 e os seguintes valores tabelados para aproximar a raiz da equação

$$f(x) := e^{-x} - x = 0.$$

x_i	0.3	0.4	0.5	0.6
e^{-x_i}	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812

v.s.f.f.

5.3. Seja p_n o polinómio interpolador de f em $n+1$ nós $x_0, x_1, \ldots, x_n$, igualmente espaçados do intervalo $[a, b]$ e tais que $x_0 = a$ e $x_n = b$.

(a) Mostre que se existirem constantes positivas c e M tais que $\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq cM^n$ então $\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$. Verifique que este resultado se aplica à função $f(x) = e^{3x}$.

(b) Mostre que se existirem constantes positivas c e M, $cM(b-a) < e$, tais que $\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq cM^n(n+1)!$, então também $\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$.

5.4. Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \qquad g(x) = e^x + e^{-x}.$$

(a) Determine os polinómios interpoladores de f nos pontos

$$x_k = -1 + \frac{2k}{n}, \qquad k = 0, \ldots, n,$$

para $n = 4$ e $n = 8$. Compare graficamente os polinómios interpoladores com a função f.

(b) Determine os polinómios interpoladores de g nos mesmos pontos da alínea (a) para $n = 4$ e $n = 8$. Compare graficamente os polinómios interpoladores com a função g.

(c) Determine os polinómios interpoladores de f nos nós de Chebyshev,

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\,\pi\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

para $n = 4$ e $n = 8$. Compare graficamente os polinómios interpoladores com a função f.

(d) Determines as splines cúbicas naturais interpoladoras de f nos mesmos nós da alínea (a) para $n = 4$ e $n = 8$. Compare graficamente as splines interpoladoras com a função f.