INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2005/2006

ANÁLISE NUMÉRICA

Exercícios

3.5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \alpha+1 & \alpha \\ \alpha & \alpha-1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \gg 1.$$

(a) Mostre que os valores próprios da matriz A e os correspondentes vectores próprios são

$$\lambda_1 = \alpha+\beta, \qquad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\beta-1}{\alpha} \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = \alpha-\beta, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\beta-1}{\alpha} \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde $\beta = \sqrt{\alpha^2+1}$.

(b) Determine $\mathrm{cond}_p(A)$, $p = 1, 2, \infty$.

(c) Determine as soluções dos sistemas lineares

$$Ax = b, \qquad A\tilde{x} = \tilde{b},$$

onde $b = \lambda_1 u_1$, $\tilde{b} = b + \varepsilon u_1$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, e verifique a validade da desigualdade

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \mathrm{cond}_\infty(A)\frac{\|b-\tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty}.$$

(d) Determine as soluções dos sistemas lineares

$$Ax = b, \qquad A\bar{x} = \bar{b},$$

onde $b = \lambda_1 u_1$, $\bar{b} = b + \varepsilon u_2$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, e verifique a validade da desigualdade

$$\frac{\|x-\bar{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \mathrm{cond}_\infty(A)\frac{\|b-\bar{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty}.$$

v.s.f.f.

3.6. Considere a matriz $A \in L^n(\mathbb{R})$ da forma

$$A = \begin{bmatrix} \beta & \alpha & \cdots & \cdots & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0.$$

(a) Determine a matriz inversa de A.

(b) Determine $\mathrm{cond}_1(A), \mathrm{cond}_\infty(A)$ e $\mathrm{cond}_*(A)$.

(c) Considere os sistemas lineares

$$Ax = b, \qquad \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b},$$

onde A é tomada com $\alpha = \beta = 1$, $b \in \mathbb{R}^n$ é tal que $\|b\|_\infty = 1$, $\tilde{b}$ difere de b a menos de 10^{-2m} em cada uma das componentes e $\tilde{A}$ é obtida a partir de A por adição de 10^{-2m} aos seus elementos; m é tal que $n10^{-m} \equiv \mu < 1$. Apresente uma estimativa para o erro relativo da solução $\tilde{x}$ em relação à solução x.

3.7. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde $A \in L^n(\mathbb{R})$ é uma matriz triangular, superior ou inferior, não singular. Mostre que quer o método de Jacobi quer o método de Gauss-Seidel, com condição inicial arbitrária, permitem obter a solução exacta do sistema num número finito de iteradas e determine quantas.

3.8. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 5 \\ 1 & -3 & -10 \\ 10 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 22 \\ -21 \\ 31 \end{bmatrix}.$$

(a) Por reordenação das linhas obtenha um sistema $A'x = b'$ para o qual os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel sejam convergentes para a sua solução para qualquer condição inicial. Justifique.

(b) Determine um valor aproximado da solução do sistema $A'x = b'$ com um erro absoluto inferior a 0.1 pelo método de Jacobi com condição inicial $x^{(0)} = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$.

(c) Determine um valor aproximado da solução do sistema $A'x = b'$ com um erro absoluto inferior a 0.1 pelo método de Gauss-Seidel com condição inicial $x^{(0)} = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$.