INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2005/2006

ANÁLISE NUMÉRICA

Exercícios

2.5. Considere os seguintes métodos iterativos:

$$\begin{aligned}
&(1)\ x_{n+1} = g_1(x_n), \quad n \geq 0, \qquad g_1(x) = -16 + 6x + \frac{12}{x};\\
&(2)\ x_{n+1} = g_2(x_n), \quad n \geq 0, \qquad g_2(x) = \frac{12}{1+x};\\
&(3)\ x_{n+1} = g_3(x_n), \quad n \geq 0, \qquad g_3(x) = \frac{2}{3}\,x + \frac{1}{x^2};\\
&(4)\ x_{n+1} = g_4(x_n), \quad n \geq 0, \qquad g_4(x) = \frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}, \quad a > 0.
\end{aligned}$$

Determine em cada um dos casos:

- os pontos fixos de g_i para os quais o método converge;
- a ordem de convergência do método;
- o factor assimptótico de convergência.

2.6. Considere uma sucessão $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ e outra $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ construída a partir da primeira pela fórmula

$$y_n = x_n - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-x_{n+1}-(x_{n+1}-x_n)} = \frac{x_n x_{n+2} - x_{n+1}^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n},$$

para $n \geq 0$.

(a) Pondo $x_n = z - e_n$ verifique que y_n se pode escrever na forma

$$y_n = z - \frac{e_n e_{n+2} - e_{n+1}^2}{e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n}.$$

(b) Mostre que se $\{x_n\}$ converge linearmente para z então $\{y_n\}$ converge para z mais depressa do que $\{x_n\}$.
Sugestão: Pondo $e_{n+1} = e_n(K+\delta_n)$, onde $0 < K < 1$ e $\delta_n \to 0$, quando $n \to \infty$, exprima $z - y_n$ em termos de δ_n, δ_{n+1} e K, e finalmente verifique que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z-y_n}{z-x_n} = 0.$$

(c) Tomando $x_0 = 6,\ x_{n+1} = g(x_n),\ n \geq 0$, onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 6.28 + \sin x,$ e $z = 6.01550307297\ldots$ calcule $x_n, z-x_n$ para $n = 0, 1, \ldots, 9$ e $y_n, z-y_n$ para $n = 0, 1, \ldots, 7$.

Nota. A utilização da sucessão $\{y_n\}$ para acelerar a convergência da sucessão $\{x_n\}$ é conhecida pelo método Δ^2 de Aitken para aceleração da convergência de uma sucessão.

2.7. Considere o polinómio do 3º grau

$$p(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 16.$$

(a) Mostre que o polinómio tem três raízes reais, $z_1 < z_2 < z_3$, tais que

$$z_1 \in [1.0, 1.2], \qquad z_2 \in [2.6, 2.8], \qquad z_3 \in [5.0, 5.2].$$

(b) Mostre que o método de Newton com iterada inicial $x_0 \in [1.0, 1.2]$ converge para a raiz z_1.

(c) Utilize o método de Newton para obter um valor aproximado da raiz z_1 com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

2.8. Considere o polinómio do Exercício 2.7.

(a) Mostre que o método de Newton com iterada inicial $x_0 \in [2.6, 2.8]$ converge para a raiz z_2.

(b) Utilize o método de Newton para obter um valor aproximado da raiz z_2 com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.