INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2005/2006

ANÁLISE NUMÉRICA

Exercícios

8.1. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

onde $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável, I é um intervalo de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, e y_0 é uma constante real.

(a) Obtenha um valor aproximado para $Y(h)$ usando dois passos de comprimento $h/2$ do método de Heun.

(b) Obtenha um valor aproximado para $Y(h)$ usando um passo de comprimento h do método de Taylor de 4ª ordem.

(c) Obtenha um valor aproximado para $Y(h)$ usando um passo de comprimento h do método de Runge-Kutta clássico de 4ª ordem.

8.2. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x), \qquad a \leq x \leq b, \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

onde $f \in C([a, b])$ e y_0 é uma constante real. Escrevendo a equação na forma

$$y(x) = y_0 + \int_a^x f(t)\, dt,$$

mostre que:

(i) o método de Euler modificado (ou método do ponto médio) corresponde à aplicação da regra do ponto médio ao integral;

(ii) o método de Heun corresponde à aplicação da regra dos trapézios ao integral;

(iii) o método de Runge-Kutta clássico de 4ª ordem corresponde à aplicação da regra de Simpson ao integral.

8.3. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \\ y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = z_0, \end{cases}$$

onde $f : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua e Lipschitziana em relação às segunda e terceira variáveis, I é um intervalo de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, e y_0, z_0 são constantes reais.

(a) Obtenha valores aproximados para $Y(h)$ e $Y'(h)$ usando dois passos de comprimento $h/2$ do método de Euler.

(b) Obtenha valores aproximados para $Y(h)$ e $Y'(h)$ usando um passo de comprimento h do método de Taylor de $2^{\underline{a}}$ ordem.

(c) Obtenha valores aproximados para $Y(h)$ e $Y'(h)$ usando um passo de comprimento h do método de Runge-Kutta clássico de $2^{\underline{a}}$ ordem.

(d) Obtenha valores aproximados para $Y(2h)$ e $Y'(2h)$ usando um passo de comprimento h do método preditor-corrector constituído pelos métodos de Adams-Bashforth e Adams-Moulton de $2^{\underline{a}}$ ordem, tomando para valores aproximados para $Y(h)$ e $Y'(h)$ os valores obtidos em qualquer das alíneas anteriores.

8.4. Determine todos os métodos multipasso lineares estáveis com 3 passos e ordem de convergência 3.