INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2005/2006

ANÁLISE NUMÉRICA

Exercícios

7.1. Considere o integral

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

(a) Determine o valor aproximado do integral usando a regra dos trapézios composta com

$$M = 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8,$$

subintervalos de integração. Apresente uma tabela com as seguintes colunas:

(i) M.

(ii) $I_1^{(M)}(f)$.

(iii) A estimativa de erro obtida a partir da fórmula de erro

$$E_1^{(M)}(f) = -\frac{b-a}{12}\, h_M^2 f''(\xi), \qquad \xi \in]a, b[.$$

(iv) A estimativa de erro dada pela fórmula

$$\frac{1}{3}\left| I_1^{(M)}(f) - I_1^{(M/2)}(f) \right|.$$

(v) O valor do erro $\left|E_1^{(M)}(f)\right|$ calculado sabendo que o valor exacto do integral é $I = 0.746824132812\ldots$

(vi) O valor do quociente $\left|E_1^{(M)}(f)\right| / \left|E_1^{(M/2)}(f)\right|$.

(b) Repita o exercício (com excepção de (iii)) para o integral

$$\tilde{I} = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx.$$

7.2. Calcule o valor aproximado dos integrais

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx, \qquad\qquad \tilde{I} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx,$$

usando as seguintes fórmulas de quadratura:

$$I_1^{(6)}(f), \qquad I_2^{(6)}(f), \qquad I_3^{(6)}(f), \qquad I_6^{(6)}(f) \equiv I_6(f).$$

Determine em cada caso os erros dos valores aproximados a partir dos resultados exactos:

$$I = 0.746824132812\ldots \qquad\qquad \tilde{I} = 0.785398163397\ldots.$$

7.3. **(a)** Obtenha a fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 8, a correspondente fórmula composta e os respectivos erros.

(b) Supondo que $f \in \mathcal{P}_{n+\nu_n}$, onde $\nu_n = 1 + \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^n\right]$, mostre que o erro de integração da fórmula de Newton-Cotes de ordem n composta com $2M$ subintervalos, onde M é múltiplo de n, é dado por

$$E_n^{(2M)}(f) = \frac{I_n^{(2M)}(f) - I_n^{(M)}(f)}{2^{n+\nu_n} - 1}.$$

7.4. Deduza as fórmulas de quadratura de Gauss de ordens $n = 0, 1, 2$ para calcular integrais da forma

$$I(f) = \int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx.$$

Sugestão. Utilize os polinómios de Laguerre.

Nota. $I(x^k) = k!, \quad k \in \mathbb{N}_0$.