INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2005/2006

ANÁLISE NUMÉRICA

Exercícios

6.1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	1	16

(a) Determine de entre os polinómios $p \in \mathcal{P}_1$ aquele que minimiza a *distância*

$$d(f,p) = \left[\sum_{i=0}^{3} [f(x_i) - p(x_i)]^2\right]^{1/2}.$$

(b) Idem para $p \in \mathcal{P}_2$.

(c) Idem para $p \in \mathcal{P}_3$.

(d) Determine em cada um dos casos o valor mínimo da *distância* $d(f,p)$.

Nota: $\mathcal{P}_m$ designa o conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a $m \in \mathbb{N}$.

6.2. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

i	0	1	2	3	4
x_i	-1.0	-0.5	0.0	1.5	1.0
$f(x_i)$	0.0	0.5	1.0	0.5	0.0

Determine de entre os polinómios trigonométricos da forma

$$\phi(x) = a_0 + a_1 \cos(\pi x) + a_2 \cos(2\pi x),$$

aquele que minimiza a *distância*

$$d(f,\phi) = \left[\sum_{i=0}^{4} [f(x_i) - \phi(x_i)]^2\right]^{1/2}.$$

6.3. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

i	0	1	2	3
x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0
$f(x_i)$	5.43656	2.0	0.735759	0.270671

Determine de entre as funções da forma

$$\phi(x) = \frac{1}{ax+b}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-b/a\},$$

aquela que minimiza a *distância*

$$d(f,\phi) = \left[\sum_{i=0}^{3} [f(x_i) - \phi(x_i)]^2 \right]^{1/2}.$$

6.4. Determine de entre os polinómios de grau menor ou igual a 2 a *melhor aproximação mínimos quadrados* da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^4 + x^3$, relativamente aos seguintes produtos internos:

(a)

$$\langle g, h \rangle = \int_{-1}^{1} g(x)h(x)\,dx, \qquad \forall g, h \in C([a,b]).$$

Sugestão: utilize os polinómios de Legendre.

(b)

$$\langle g, h \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{g(x)h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad \forall g, h \in C([a,b]).$$

Sugestão: utilize os polinómios de Chebyshev.

(c)

$$\langle g, h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g(x)h(x)\,dx, \qquad \forall g, h \in L^2(\mathbb{R}),$$

onde $L^2(\mathbb{R})$ designa o conjunto das funções contínuas para as quais existe o integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[g(x)]^2\,dx$.

Sugestão: utilize os polinómios de Hermite.