

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO  
Licenciatura em Engenharia Biológica  
Licenciatura em Engenharia Química  
Ano Lectivo: 2005/2006

ANÁLISE E SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Exercícios

**8.1.** Considere o problema de valor inicial ou de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - x + 4y(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

com solução

$$y(x) = \frac{x}{4} - \frac{3}{16} + \frac{19}{16} e^{4x}.$$

**a)** Obtenha um valor aproximado  $y_2$  para  $y(0.2)$  usando o método de Euler com passo  $h = 0.1$ .

**b)** Recorrendo a um resultado teórico, deduza um majorante para  $|y(0.2) - y_2|$ . Compare com o valor do erro de facto cometido.

**c)** Utilize o método de Taylor de ordem 2, com  $h = 0.1$ , para obter uma aproximação para  $y(0.2)$ . Compare com o resultado obtido em a).

**d)** Obtenha uma aproximação para  $y(0.2)$  usando o método de Runge-Kutta de ordem 4, com  $h = 0.2$ .

**8.2.** Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0.5. \end{cases}$$

**a)** Obtenha um valor aproximado para  $y(1)$  pelo método de Heun, usando  $h = 0.2$ .

**b)** O mesmo que em a), pelo método de Taylor de ordem 2.

**c)** Compare as soluções aproximadas obtidas nas alíneas anteriores com a solução exacta.

**8.3.** Utilize o método do ponto médio (ou método de Euler modificado) para obter uma aproximação da solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = x + y(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

no ponto  $x = 0.1$  com espaçamentos  $h = 0.1, h = 0.05, h = 0.025$ . Sabendo que a solução exacta deste problema é dada por

$$y(x) = e^x - 1 - x,$$

compare os resultados obtidos com o valor exacto de  $y(0.1)$ . Comente.

**8.4.** Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 0.04y(x), & 0 \leq x \leq 2, \\ y(0) = 1000, \end{cases}$$

com solução exacta

$$y(x) = 1000 e^{0.04x},$$

estime  $y(1)$  pelo método de Taylor de ordem 2 e pelo método do ponto médio com  $h = 1, h = 0.5, h = 0.25$ . Com que método e com que espaçamento obteve uma melhor aproximação?

**8.5.** Verifique que o método do ponto médio quando aplicado ao problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = -20y(x), & 0 \leq x \leq 20, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

conduz a

$$y_{n+1} = (1 - 20h + 200h^2)^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**a)** Aplique este método para obter uma solução aproximada de  $y(10)$  e compare o resultado com o valor exacto, sabendo que a solução do problema anterior é

$$y(x) = e^{-20x}.$$

**b)** Se  $n$  for muito grande, o que acontece com a solução fornecida por este método de Runge-Kutta?

**8.6.** Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - \frac{y(x)}{x}, & 2 \leq x \leq 3, \\ y(2) = 2, \end{cases}$$

determine um valor aproximado para  $y(2.1)$  pelo método de Euler com  $h = 0.1, h = 0.05, h = 0.025$ .

**8.7.** Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = -xy(x), & 0 \leq x \leq 2, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (\text{P})$$

**a)** Mostre que  $y(x) = e^{-x^2/2}$  é a única solução de (P). Compare o valor exacto de  $y(2)$  com o valor aproximado dado pelo método de Euler, considerando  $h = 1, h = 0.5$ .

**b)** Apresente estimativas de erro para os valores obtidos em a), e determine o número de iterações de forma a garantir um erro absoluto inferior a  $10^{-6}$  (admitindo que o valor inicial é exacto). Considerando que  $y_0$  é um valor arredondado, com um erro  $|e_0| \leq \varepsilon$ , qual o valor de  $\varepsilon$  máximo de forma a poder garantir o mesmo erro?

**8.8.** Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x), & a \leq x \leq b, \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

onde  $f \in C[a, b]$  e  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Escrevendo a equação na forma

$$y(x) = y_0 + \int_a^x f(x) dx,$$

mostre que o método de Euler modificado (ou método do ponto médio) corresponde à aplicação da regra do ponto médio ao integral  $\int_a^x f(x) dx$ . Mostre ainda que o método de Heun corresponde à regra dos trapézios e o método clássico de Runge-Kutta à regra de Simpson.

**8.9.** Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = \alpha, \end{cases} \quad (\text{P})$$

onde  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e lipschitziana na segunda variável. Considere o seguinte método numérico para a aproximação de (P):

$$y_{n+1} = y_n + h[f(x_n, y_n) + g(h)], \quad n = 0, \dots, N, \quad (\text{M})$$

onde  $x_n = nh, n = 0, \dots, N, h = \frac{1}{N}$ , e  $g \in C^1[0, \infty]$  é tal que  $g(0) = 0$ .

**a)** Mostre que o método (M) é consistente e convergente. O que é que pode dizer sobre a sua ordem de convergência?

**b)** Sejam  $f(x, y) = x \sin y, \alpha = 3, g(h) = h$  e  $h = 0.2$ . Obtenha uma aproximação de  $y(1)$  pelo método (M). Determine um majorante para o erro cometido.

**8.10.** Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(a) = a. \end{cases}$$

**a)** Mostre que se  $f(x, y) = g(y)$ , com  $|g(y)| \leq c < 1$  e  $|g'(y)| \leq L$ , para qualquer  $y$ , então a sucessão  $x_{n+1} = y(x_n)$  converge, qualquer que seja  $x_0 \in \mathbb{R}$ , e o seu limite é  $a$ .

b) Indique a expressão de  $y_1$  para um espaçamento  $h$  obtida pelo método de Taylor de segunda ordem.

**8.11.** Considere a equação diferencial

$$y'(x) = f(y(x)),$$

e suponha que  $f'(x) \in [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

a) Mostre que se  $h = 1$ , o método de Euler converge para um valor fixo quando  $n \rightarrow \infty$ . Qual?

b) O que acontece quando os valores de  $h$  tendem para zero?

c) Calcule uma aproximação de  $y(1)$  considerando  $h = 0.2$ , para

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin(x) - x, \quad y(0) = 1.$$

**8.12.** Suponha que um método tem uma expressão para o erro  $|e_n| \approx Ch^p$ , em que  $h = (b - a)/n$ , para  $n$  grande.

a) Encontre uma expressão para obter o valor de  $p$ , relacionando  $|e_{2n}|$  e  $|e_n|$ .

b) Avalie o critério anterior aplicando-o experimentalmente aos métodos de Euler e ponto-médio, considerando o problema de valor inicial apresentado na alínea c) do Exercício 9.11.

**8.13.** Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^x, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 1, & y'(0) = -1. \end{cases}$$

Obtenha valores aproximados para  $y(0.2)$  e para  $y'(0.2)$  pelo método de Euler com passo  $h = 0.1$ . Sabendo que

$$\max_{x \in [0, 0.2]} |y''(x)| \leq 2, \quad \max_{x \in [0, 0.2]} |y^{(3)}(x)| \leq 2,$$

deduza um majorante para o erro cometido.

**8.14.** Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = -1, & y'(0) = 1. \end{cases}$$

a) Determine o valor aproximado de  $y(1)$ , pelo método de Euler, usando  $h = 0.5$ .

b) O mesmo que em a) pelo método de Euler modificado.

**8.15.** Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x)), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 1, & y'(0) = 0. \end{cases} \quad (\text{P})$$

onde  $f$  é uma função a especificar.

**a)** Tomando  $f(x, y(x)) = y(x)$ , aplique o método de Euler com  $h = 0.25$ , para determinar a aproximação para  $y(1)$ , e compare com a solução exacta do problema.

**b)** O mesmo que em a), mas usando o método do ponto-médio.

**c)** Tomando  $f(x, y(x)) = y(x)^3$ , aproxime  $y(1)$  usando o método do ponto médio com  $h = 0.5, h = 0.25, h = 0.1$ .

**d)** Tomando  $f(x, y(x)) = y'(x)y(x)^2 - xy'(x)^2$ , aproxime  $y(1)$  usando o método do ponto médio com  $h = 0.5, h = 0.25, h = 0.1$ .

**8.16.** Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2, & 1 \leq x \leq 2, \\ y(1) = -1, \end{cases} \quad (\text{P})$$

e o par preditor-corrector

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n), \\ y_{n+1}^{(j+1)} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(j)}) + f(x_n, y_n)], \end{cases} \quad j = 0, 1, \dots \quad (\text{M})$$

**a)** Sabendo que  $|y(x)| \leq 1, \forall x \in [1, 2]$ , diga para que valores de  $h$  a iteração  $(\text{M})_2$  é convergente.

**b)** Aplique o método (M) com  $h = 0.5, h = 0.25, h = 0.125$  para obter um valor aproximado de  $y(2)$ . Efectue apenas uma iteração pelo método corrector.

**8.17. a)** Deduza um método unipasso, usando uma regra de quadratura de grau 1 da forma

$$Q(f) = Af(x_m) + Bf\left(x_m + \frac{h}{2}\right)$$

para aproximar o integral,

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} f(s, y(s)) ds,$$

e usando como preditor para  $y\left(x_m + \frac{h}{2}\right)$  o método de Euler explícito.

**b)** Determine a ordem de consistência do método, e conclua acerca da ordem de convergência.

**c)** Deduza um método multipasso, usando uma regra de quadratura de grau 1

$$Q(f) = Af(x_{m-2}) + Bf(x_m),$$

para aproximar o mesmo integral da alínea a).

**8.18. a)** Deduza um método multipasso implícito, usando uma regra de quadratura

$$Q(f) = Af(x_{m-1}) + Bf(x_{m+1})$$

de grau 1 para aproximar o integral

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} f(s, y(s)) ds,$$

e aproximando  $y_{m+1}$  pelo método de Euler modificado.

**b)** Determine o valor aproximado para  $y(1)$ , considerando  $y'(x) = y(x)/2$ , usando este método e inicializando os valores com o método de Euler e com o método de Euler modificado. Comente os resultados face aos valores exactos.

**8.19.** Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & 1 \leq x \leq 2, \\ y(1) = \alpha, \end{cases}$$

e o seguinte método multipasso para a sua resolução numérica:

$$y_{n+1} = 4y_n - 3y_{n-1} - 2hf(x_{n-1}, y_{n-1}), \quad n \geq 1 \quad (\text{M})$$

com  $x_0 = 1$  e  $x_n = x_{n-1} + h$ ,  $n = 1, 2, \dots$

**a)** Verifique que o método (M) é consistente e determine a sua ordem.

**b)** Sejam  $f(x, y) = -y^2$  e  $\alpha = 1$ . Obtenha um valor aproximado para  $y(1.6)$  pelo método (M). Tome  $h = 0.1$  e calcule  $y_1$  pelo método de Taylor de ordem 2. Compare com a solução exacta.

**c)** Analise a convergência do método (M).

**8.20.** Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 - y(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

e o seguinte método implícito a dois passos:

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1}) + \frac{h}{4} [(3+a)f_{n+1} - af_n + 3f_{n-1}], \quad n \geq 1, \quad (\text{M})$$

onde  $f_n = f(x_n, y_n)$  e  $a \in \mathbb{R}$ .

**a)** Supondo que  $y \in C^3[0, 1]$ , mostre que o método (M) é consistente e que o erro de truncatura local  $T_{n+1}$  é de ordem  $O(h^2)$ . Determine  $a$  de modo a que  $T_{n+1} = O(h^3)$ .

**b)** Mostre que o método (M) é convergente.

**c)** Utilize o método (M), com  $a = 1$  e  $h = 0.1$ , para aproximar o valor de  $y(0.4)$ . Obtenha o valor inicial  $y_1$  pelo método de Euler modificado. Compare com a solução exacta

$$y(x) = x^2 - 2x + 2 - e^{-x}.$$

**8.21.** Determine todos os métodos multipasso convergentes de ordem 2 do tipo

$$y_{n+1} = a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + h [b_0 f(x_n, y_n) + b_1 f(x_{n-1}, y_{n-1})], \quad n \geq 1.$$

**8.22.** Os métodos multipasso de Nyström são obtidos integrando a equação diferencial

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

em  $[x_{n-1}, x_{n+1}]$  e aproximando a função integranda  $f(x, y)$  pelo seu polinómio interpolador de grau  $p \geq 0$  em  $p + 1$  pontos equidistantes  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-p}$ .

**a)** Mostre que os métodos de Nyström têm a forma geral

$$y_{n+1} = y_{n-1} + h [b_0 f(x_n, y_n) + b_1 f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \dots + b_p f(x_{n-p}, y_{n-p})], \quad n \geq p,$$

onde  $h = x_{n+1} - x_n$  e

$$b_k = \int_{-1}^1 \prod_{i=0, i \neq k}^p \frac{i+t}{i-k} dt, \quad k = 0, 1, \dots, p.$$

**b)** Obtenha os métodos de Nyström com  $p = 0, p = 1$  e  $p = 2$ . Determine o erro de truncatura local em cada um dos casos.

**c)** Mostre que todos os métodos de Nyström são convergentes.