INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Biológica
Licenciatura em Engenharia Química
Ano Lectivo: 2005/2006

ANÁLISE E SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Exercícios

7.1. Considere o integral
$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

a) Determine o seu valor aproximado, considerando quatro subintervalos e utilizando:

(i) A regra dos trapézios.
(ii) A regra de Simpson.

b) Faça uma estimativa do número mínimo de subintervalos que se deveria considerar, se se pretendesse calcular o integral da alínea anterior com um erro inferior a 10^{-4}, utilizando:

(i) A regra dos trapézios.
(ii) A regra de Simpson.

7.2. Suponha que a função f é definida no intervalo $[0, b]$, do seguinte modo:
$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3x - 1, & 1 \leq x \leq b. \end{cases}$$

a) Obtenha aproximações para o integral
$$I(f) = \int_0^b f(x) dx,$$
com $b = 2$ e $b = 3$, dos seguintes modos:

(i) Utilizando a regra dos trapézios composta, com passo $h = 1$.
(ii) Utilizando a regra de Simpson (simples).

b) Determine o erro de cada um dos resultados obtidos, comparando com o valor exacto de $I(f)$.

c) A fórmula do erro da regra dos trapézios é aplicável neste caso? E a da regra de Simpson? Justifique.

7.3. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f definida em $\mathbb{R}$:

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	2	$1/2$	$-1/2$

a) Utilizando a fórmula de Newton com diferenças divididas, determine o polinómio de grau ≤ 2, $p_2(x)$, que interpola $f(x)$ nos pontos $x_0 = -2$, $x_2 = 0$ e $x_4 = 2$.

b) Suponha que pretendemos aproximar

$$I(f) = \int_{-2}^{2} f(x)dx, \qquad \text{por} \qquad I_2(f) = \int_{-2}^{2} p_2(x)dx.$$

Sabendo que as derivadas de f verificam $|f^{(j)}(x)| \leq j/2,\ j = 1, 2, 3, 4$, no intervalo $[-2, 2]$, determine um majorante para o erro de integração. Justifique.

7.4. A tabela seguinte mostra os resultados obtidos por uma regra de Newton-Cotes (composta) no cálculo do integral $I(f)$ de uma certa função f indefinidamente diferenciável.

N	8	16	32	64
$I_n^{(N)}$	295.27	274.15	268.97	267.68

O valor $I_n^{(N)}$ representa a aproximação obtida, com $N + 1$ nós de integração. Sabendo que o valor exacto do integral é $I(f) = 267.25$, diga, justificando, que fórmula poderá ter sido utilizada (trapézios ou Simpson).

7.5. Calcule o valor aproximado de

$$I = \int_{0}^{1} \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) dx,$$

usando:

a) A regra dos trapézios composta com 5 nós de integração igualmente espaçados, e determine um majorante do erro.

b) A regra de Simpson simples, e determine um majorante do erro.

7.6. Sabe-se que a função $f \in C^4(-2, 10)$ toma os valores $f(1) = -2, f(4) = 7, f(10) = 6$, e que $1, 4$ e 10 são pontos fixos de $f \circ f$.

a) Determine o valor aproximado de

$$I(f) = \int_{-2}^{10} f(x)dx,$$

usando a regra de Simpson com 5 nós de quadratura.

b) Admitindo que $|f^{(4)}(x)| \leq 10$, determine um majorante do erro absoluto cometido em a).

7.7. Considere a regra de Simpson composta num intervalo $[a, b]$ e o valor aproximado para N subintervalos, dado por $S_N(f)$. Mostre que quando $f^{(4)}$ é constante se verifica a condição para o erro

$$15E_{2N}(f) = S_{2N}(f) - S_N(f).$$

7.8. Aplique a regra dos trapézios composta para aproximar os integrais

$$I_1 = \int_0^{2\pi} e^{\cos x}\, dx\,, \qquad\qquad I_2 = \int_0^1 e^{\sqrt{x}}\, dx\,.$$

Estime a ordem de convergência em ambos os casos. Note que $I_1 \approx 7.95492652101284$ e $I_2 = 2$.

7.9. Seja $f \in C[a,b]$ uma função tal que f' é integrável em $[a,b]$.

a) Prove a seguinte estimativa do erro para a regra dos trapézios composta:

$$E_1^{(N)}(f) = \sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\frac{x_{j-1}+x_j}{2} - x \right) f'(x)\, dx,$$

onde $x_j = a + jh$, $j = 0, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{N}$.

b) Calcule um valor aproximado do integral

$$I(f) = \int_0^1 e^{\sqrt{x}}\, dx,$$

pela regra dos trapézios composta com $h = \frac{1}{6}$. Estime o erro.

7.10. Demonstre que na regra de integração do ponto médio se tem:

$$\int_{x_0-\frac{h}{2}}^{x_0+\frac{h}{2}} f(x)dx = hf(x_0) + E_0(f),$$

onde

$$E_0(f) = \frac{h^3 f''(\theta)}{24} \qquad \text{com} \qquad \theta \in \left[x_0 - \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2} \right].$$

7.11. Pretende-se construir uma fórmula de quadratura do tipo

$$I_1(g) = A_0 g(0) + A_1 g(1)$$

para aproximar o integral

$$I(g) = \int_0^1 e^x g(x)\, dx.$$

a) Calcule A_0 e A_1 de modo a que a fórmula seja exacta para funções $g(x) = a + bx$ (a e b reais).

b) Seja $g(x) = \sin x$. Obtenha uma aproximação de $I(g)$ usando a regra de quadratura obtida em a) e calcule uma estimativa do erro absoluto.

c) Determine um valor aproximado para $I(g)$ usando a regra dos trapézios composta com 4 subintervalos.

d) Determine o número mínimo de subintervalos necessário na regra dos trapézios composta para garantir que o erro absoluto do resultado seja inferior a 10^{-2} (despreze erros de arredondamento).

7.12. Pretende-se obter uma fórmula de integração com dois nós no intervalo $[-1,1]$, isto é, uma fórmula do tipo:

$$I_1(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1),$$

para aproximar o integral

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

a) Escreva o sistema de equações que lhe permite calcular A_0 e A_1 de modo a que a fórmula seja, pelo menos, de grau 1.

b) Resolva o sistema em ordem a A_0 e A_1.

c) Mostre que, se x_0 e x_1 forem tais que $x_0 x_1 = -\frac{1}{3}$, a fórmula de integração assim obtida tem, pelo menos, grau 2.

7.13. a) Determine uma fórmula de quadratura

$$I_1(f) = 2f(x_0) + A_1 f(x_1),$$

que seja exacta para os polinómios de grau 2 no intervalo $[0,1]$.

b) Indique como construir uma fórmula composta, partindo da expressão obtida na alínea a).

7.14. Pretende-se calcular

$$Z(\alpha, m) = \int_{-1}^{1} (x^\alpha + 2)\cos(m \arccos(x))dx.$$

a) Considere a aproximação de $Z(1,2)$ e de $Z(2,2)$ usando a integração de Gauss-Legendre com dois nós de quadratura. Alguns destes valores é exacto, qual?

b) Calcule o valor aproximado de $Z(2,m)$ usando a regra de Simpson simples. Determine o valor exacto de $Z(2,2)$ através da fórmula do erro.

7.15. a) Determine uma fórmula de quadratura do tipo

$$I_1(f) = A_0 f(-c) + A_1 f(c),$$

que seja exacta para integrais $I(x^k)$, com $k = 0,1,2$, onde

$$I(f) = \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1} dx.$$

b) Utilize a fórmula obtida em a) para calcular exactamente

$$J = \int_{-1}^{0} \frac{1 - x + x^2}{x^2 + 1} dx.$$

c) Calcule o valor aproximado do integral definido em b) usando a fórmula de integração de Gauss-Legendre com 3 nós de integração.

7.16. Considere o integral

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx.$$

a) Aproxime $I(f)$ pela fórmula de Gauss-Chebyshev com 2, 4 e 6 nós de integração.

b) Estime o erro utilizando a aproximação

$$E_n(f) \approx I_{n+2}(f) - I_n(f).$$

7.17. Para aproximar o integral

$$I(f) = \int_{0}^{\infty} e^{-x} f(x) \, dx,$$

considere a fórmula de quadratura

$$I_1(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1),$$

com $x_0 = 2 - \sqrt{2}$ e $x_1 = 2 + \sqrt{2}$. Determine os pesos A_0 e A_1 de tal modo que a fórmula seja pelo menos de grau 1. Mostre que a fórmula assim obtida é de grau 3.

7.18. Considere os integrais

$$I(f) = \int_{0}^{1} e^{-x} f(x) \, dx.$$

a) Deduza uma fórmula de quadratura que seja exacta para $I(a + bx)$, usando um único nó de integração em $[0, 1]$.

b) Indique a fórmula composta, e calcule uma aproximação do integral $I(\cos(x^2))$ usando 4 subintervalos.

7.19. Utilize as fórmulas de Newton-Cotes fechadas com $n = 2, 4, 6, 10$ e 14 para aproximar o integral

$$I = \int_{-4}^{4} \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Compare os resultados com a solução exacta $I = 2 \arctan 4 \approx 2.65163533$. Comente.

7.20. Considere a equação integral (de Volterra de segunda espécie)

$$y(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)y(t)\,dt, \qquad 0 \le x \le b. \tag{1}$$

Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pontos equidistantes do intervalo $[0, b]$, com $h = x_i - x_{i-1}, i = 1, \ldots, n$ e seja $y(0) = f(0)$. Pretende-se aproximar os valores da solução da equação (1) nos pontos $x_i, i = 0, \ldots, n$, pelo seguinte método numérico.

MÉTODO

Para a solução exacta tem-se

$$y(x_i) = f(x_i) + \int_0^{x_i} K(x_i,t)y(t)\,dt, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Para aproximar o integral

$$I(K,y) = \int_0^{x_i} K(x_i,t)y(t)\,dt,$$

usa-se uma quadratura numérica. Por exemplo, usando a regra dos trapézios composta, obtém-se

$$I(K,y) \approx Q_1^i(K,y) = h\left[\frac{1}{2}K(x_i,0)y(0) + \sum_{j=1}^{i-1} K(x_i,x_j)y(x_j) + \frac{1}{2}K(x_i,x_i)y(x_i)\right].$$

Segue-se que a solução aproximada $Y_i, i = 1, \ldots, n$, satisfaz a equação

$$Y_i = f(x_i) + h\Big[\frac{1}{2}K(x_i,0)f(0) + \sum_{j=1}^{i-1} K(x_i,x_j)Y_j + \frac{1}{2}K(x_i,x_i)Y_i\Big], \tag{2}$$

ou seja, uma vez conhecidos os valores de Y_j para $j \le i-1$, a aproximação Y_i é obtida da equação (2).

Aplique o método acima para aproximar a equação integral

$$y(x) = x + \int_0^x \sin(x-t)y(t)\,dt, \qquad 0 \le x \le 1,$$

com $n = 10, 20$ e 40. Compare com a solução exacta

$$y(x) = x + \frac{x^3}{6}.$$

Com base nos resultados obtidos, analise a ordem de convergência do método.