INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Biológica
Licenciatura em Engenharia Química
Ano Lectivo: 2005/2006

ANÁLISE E SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Exercícios

5.1. Considere a matriz de Vandermonde

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix}.$$

Mostre que

$$\det V = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

5.2. Sejam $x_1, x_2, \dots, x_M$ valores reais distintos e $f_1, f_2, \dots, f_M$ os correspondentes valores de uma função f nesses pontos. Prove que existe uma única função F_M da forma

$$F_M(x) = \sum_{j=1}^{M} c_j e^{jx},$$

para a qual se tem $F_M(x_i) = f_i$, $i = 1, 2, \dots, M$.

5.3. Sejam $x_0, x_1, \dots, x_n$ pontos distintos de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e sejam $l_0, l_1, \dots, l_n$ os polinómios de Lagrange construídos nesses pontos. Mostre que

$$\sum_{j=0}^{n} x_j^m l_j(x) = x^m, \qquad m = 0, 1, \dots, n.$$

5.4. Considere a função

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) - 1,$$

onde $l_0, l_1, \dots, l_n$ são os polinómios de Lagrange de grau n associados aos nós $x_0, x_1, \dots, x_n$. Prove que:

a) g é um polinómio de grau $\le n$.

b) $g(x_i) = 0,\ i = 0, 1, ..., n.$

c) $g(x) = 0$, para todo o x.

5.5. Seja f um polinómio de grau m e sejam $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+2$ pontos distintos em $[a, b]$. Deduza que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \begin{cases} p^*_{m-n-1}(x), & n < m-1 \\ a_m, & n = m-1 \\ 0, & n > m-1 \end{cases}$$

onde p^*_{m-n-1} designa um polinómio de grau $m-n-1$ e a_m é o coeficiente do termo em x^m de f.

5.6. Na tabela seguinte são apresentados valores de uma função $f \in C^2(]0, +\infty[)$:

x	0.8	1.0	1.6
$f(x)$	1.890	2.000	3.185

a) Obtenha o polinómio p_2 que interpola f nos três pontos tabelados, usando a fórmula de Lagrange.

b) O mesmo que na alínea b), mas usando a fórmula de Newton.

c) Calcule $p_2(1.3)$ e obtenha um majorante do erro $f(1.3) - p_2(1.3)$, sabendo que $f(x) - 1/x$ é um polinómio de grau não superior a 2.

5.7. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f:

x_i	-1	1	4
$f(x_i)$	2	-2	-8

Supondo que f é um polinómio e que

$$f[-1, 1, 2] = 4, \qquad f[-1, 1, 2, 4, x] = 3, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2, 4\},$$

determine a forma de $f(x)$.

5.8. Considere a seguinte tabela de valores da função $f(x) = \log_{10} x$:

x_i	2.0	2.5	3.0
$\log_{10} x_i$	0.30103	0.39794	0.47712

a) Usando a fórmula de Newton e todos os pontos da tabela, calcular uma aproximação de $f(2.4)$.

b) Determine um majorante do erro absoluto cometido ao aproximar $f(x)$, pelo método utilizado na alínea anterior, quando $x \in [2, 3]$. Compare com o erro do resultado obtido para $x = 2.4$.

5.9. Considere a seguinte tabela de valores de uma funçãof:

x_i	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
f_i	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

a) Obtenha $f(0.47)$ usando um polinómio de grau 2.

b) Admitindo que $f \in C^3([0,1])$ e que $\max_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)| = M$, calcule um majorante do erro do resultado obtido na alínea anterior.

5.10. Seja f uma função que nos nós $\{-1, 1, 3\}$ tem como polinómio interpolador

$$p_2(x) = 3 - 2x + 6x^2.$$

a) Sabendo que $f[-1, 1, 2] = 4$, calcule o polinómio p_3 que interpola f nos nós anteriores e também em $x_3 = 2$.

b) Sabendo ainda que $f^{(iv)}(x) = 78$, para todo $x \in \mathbb{R}$, determine a expressão analítica de f.

5.11. Seja $f \in C^3[0,1]$ uma função real.

a) Mostre que existe um e um só polinómio p de grau ≤ 2 tal que

$$p(0) = f(0), \qquad p(1) = f(1), \qquad \int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

b) Supondo que $|f'''(x)| \leq M$, $\forall x \in [0,1]$, mostre que

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{M}{6}.$$

5.12. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f:

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	1	1	2

a) Usando a fórmula de Newton com diferenças divididas, construa o polinómio interpolador de f de grau menor ou igual a 3.

b) Sabendo que $f'''(x) = 4x - 1$, utilize a alínea anterior para determinar a expressão exacta de f.

5.13. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f,

x_i	-2	0	2	4
$f(x_i)$	-17	5	-5	c

que se sabe ser um polinómio da forma

$$f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + 5,$$

com a_1, a_2 reais. Que relação existe entre o polinómio interpolador de f nos 3 primeiros pontos e a função f? Determine o valor de $f(4)$.

5.14. Considere $a \neq 0$ e uma função g para a qual,

$$g(0) = a, \qquad g(g(0)) = 2a, \qquad g(g(g(0))) = b.$$

a) Determine o polinómio interpolador de g no conjunto de nós $\{0, a, 2a\}$.

b) Considere b de forma a que g tenha um ponto fixo em $2a$. Mostre que numa vizinhança desse ponto fixo o polinómio interpolador p_2 é contractivo. Determine o outro ponto fixo de p_2 e verifique que num intervalo que inclua esse ponto o polinómio não é contractivo.

5.15. Sabendo que $f^{(n+1)}([a,b]) \subset [a,b]$, mostre que o erro de interpolação verifica, para qualquer $x \in [a,b]$,

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \max\{|a|, |b|\} e^{|b-a|}.$$

5.16. Suponha que os valores de f calculados nos nós $x_0, ..., x_n$ estão afectados de erro, tendo apenas sido obtidas aproximações $\tilde{f}_0, ..., \tilde{f}_n$.

Considere p_n o polinómio interpolador obtido com os valores exactos e $\tilde{p}_n$ o polinómio interpolador obtido com os valores aproximados.

a) Mostre que se $|f_k - \tilde{f}_k| \leq \varepsilon$, então

$$\max_{x \in [x_0, x_n]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq C\varepsilon,$$

ende $C = (n+1) \max_k \max_{x \in [x_0, x_n]} |l_k(x)|$.

b) No caso de nós igualmente espaçados, e $n = 2$, obtenha $C = \frac{5}{4}$.

5.17. Considere a seguinte tabela de valores:

x_i	-3	-1	1	3
f_i	-33	14	-2	-5

a) Sabendo que a função tabelada é contínua e estritamente monótona em $[-1, 3]$, determine por interpolação inversa o zero da função situado no intervalo $[-1, 1]$, utilizando o maior número possível de pontos. Justifique a escolha dos nós de interpolação.

b) Obtenha o polinómio interpolador de f nos três últimos pontos. Se determinasse o zero deste polinómio no intervalo $[-1, 1]$, obteria o mesmo resultado que na alínea anterior? Justifique.

c) Supondo que, para $x \geq -1$, a função é da forma

$$f(x) = 3x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

e que $f[-1, 1, 2] = 4$, escreva, recorrendo ao polinómio interpolador calculado na alínea anterior, uma expressão que permita obter $f(x)$.

5.18. Considere uma função injectiva que toma os valores

$$f(-2) = -1, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 3.$$

Determine o polinómio interpolador para a função inversa nos pontos indicados. Encontre um valor aproximado para a raiz de f usando interpolação inversa.

5.19. Seja $f \in C^1([a, b])$ e suponha que $f(a)f(b) < 0$ e $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$; logo existe um único $z \in (a, b)$ tal que $f(z) = 0$.

a) Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n + 1$ pontos distintos em $[a, b]$ e sejam $y_0, y_1, \ldots, y_n$ os valores de f nesses pontos, isto é, $y_j = f(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Escreva uma expressão para o polinómio $q_n \in \mathcal{P}_n$ que interpola f^{-1} nos nós $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

b) Notando que $z = f^{-1}(0)$, utilize o polinómio q_3 e os seguintes valores tabelados para aproximar a raiz da equação

$$f(x) = e^{-x} - x = 0.$$

x_i	0.3	0.4	0.5	0.6
e^{-x_i}	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812

5.20. Seja $p_n(x)$ o polinómio interpolador de f em $n + 1$ nós $x_0, x_1, \ldots, x_n$, igualmente espaçados no intervalo $[a, b]$ e tais que $x_0 = a$ e $x_n = b$.

a) Mostre que se existir uma constante $M > 0$ tal que $\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq M^n$ então $\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$. Verifique que este resultado se aplica à função $f(x) = e^{3x}$.

b) Mostre que se existir uma constante $M \in (0, e/(b - a))$ tal que $\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq M^n(n + 1)!$, então também $\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$.

5.21. Seja f uma função indefinidamente diferenciável para $x \geq 0$ e tal que $\left|f^{(m)}(x)\right| \leq M$, para todo o $x \geq 0$ e para todo o $m = 0, 1, 2, \ldots$ Seja p_n o polinómio interpolador de f nos pontos $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{n}{2}$. Mostre que $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$ para cada $x \geq 0$.

5.22. Esboçe o gráfico do polinómio mónico

$$\psi_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^{n}(t - i)$$

no intervalo $[0, n]$ para diferentes valores de n. Verifique que

$$\max_{t\in[0,n]} |\psi_{n+1}(t)| < n!$$

5.23. Considere as funções

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \qquad g(x) = e^x + e^{-x}, \qquad x \in [-1, 1].$$

a) Determine o polinómio interpolador de Lagrange de f e de g nos pontos

$$x_i = -1 + \frac{2(i-1)}{n}, \qquad i = 1, \ldots, n+1,$$

com $n = 5, 9$, e 13. Compare graficamente os polinómios interpoladores com as funções a aproximar. Explique os resultados com base na teoria.

b) Construa o polinómio interpolador p_n de f usando os zeros do polinómio de Chebyshev

$$T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\arccos x), \qquad x \in [-1, 1],$$

com $n = 5, 9$, e 13.

5.24. Pretende-se interpolar uma função f no intervalo $[-2, 3]$ por um polinómio de grau 5.

a) Quais os nós que deve considerar para que o erro do polinómio interpolador seja o menor possível nesse intervalo?

b) Determine a função interpoladora correspondente a esses nós, quando

$$f(x) = e^{-(x-1)^2}.$$

c) O mesmo que em b), considerando nós igualmente espaçados.

d) Compare graficamente os erros obtidos em b) e c).

5.25. Pretende-se construir uma tabela de valores da função e^x, para $x \in [0, 1]$, com pontos igualmente espaçados $x_j = jh$, $j = 0, 1, \cdots, N$, onde h é o espaçamento entre os pontos. Em cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ a função é aproximada pelo polinómio interpolador de grau ≤ 1 nos pontos x_j, x_{j+1}. Determine o valor máximo do espaçamento h para que o erro de interpolação em qualquer ponto do intervalo $[0, 1]$ seja inferior a 10^{-6}.