INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Biológica
Licenciatura em Engenharia Química
Ano Lectivo: 2005/2006

ANÁLISE E SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Exame de 24 de Janeiro de 2006

Duração: 3 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[1] Considere o sistema de equações algébricas não-lineares

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = g(x), \tag{S}$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad f(x) = \begin{bmatrix} -2x_1 + x_2^2 - 1 \\ x_1^2 - 2x_2 \end{bmatrix}, \qquad g(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_2^2 - 1 \\ x_1^2 \end{bmatrix}.$$

(a)[15] Mostre que o sistema (S) tem uma solução única z no conjunto

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

(b)[20] Obtenha um valor aproximado $x^{(2)}$ para a solução única z do sistema (S) usando duas iteradas do método do ponto fixo partindo da condição inicial $x^{(0)} = [0\ 0]^T$. Apresente uma estimativa do erro $\|z - x^{(2)}\|_\infty$.

(c)[15] Mostre que a determinação de um valor aproximado $\tilde{x}^{(1)}$ para a solução z do sistema (S) usando uma iterada do método da Newton generalizado partindo da aproximação inicial $\tilde{x}^{(0)} = [\alpha\ \beta]^T$, onde α, β são constantes reais, conduz à resolução de um sistema linear $Ay = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2\beta \\ 2\alpha & -2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2\alpha - \beta^2 + 1 \\ 2\beta - \alpha^2 \end{bmatrix}.$$

(d)[15] Tomando $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, resolva o sistema $Ay = b$ pelo método de eliminação de Gauss e conclua a determinação do valor aproximado $\tilde{x}^{(1)}$.

(e)[20] Determine todos os valores de α e β para os quais está garantida a convergência simultânea dos métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel para a solução do sistema $Ay = b$ para qualquer valor inicial.

v.s.f.f.

[2][20] Considere os sistemas lineares $Ax = b$ e $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, onde $A, \tilde{A}$ são matrizes quadradas de dimensão d, A é não singular, $\tilde{A}$ é tal que $\|\tilde{A} - A\|_p \, \|A^{-1}\|_p < 1$ e $b, \tilde{b}$ são vectores de $\mathbb{R}^d$. Mostre que

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_p}{\|x\|_p} \leq \frac{\mathrm{cond}_p(A)}{1 - \frac{\|\tilde{A}-A\|_p}{\|A\|_p}\mathrm{cond}_p(A)} \left(\frac{\|\tilde{A} - A\|_p}{\|A\|_p} + \frac{\|\tilde{b} - b\|_p}{\|b\|_p} \right), \qquad p = 1, 2, \infty.$$

[3][20] Determine

$$\min_{p \in \mathcal{P}_2} \int_{-1}^{1} \big[|x| - p(x)\big]^2 dx,$$

onde $\mathcal{P}_2$ designa o conjunto de polinómios de grau menor ou igual a dois.

[4]

(a)[20] Calcule o valor aproximado dos integrais

$$\textbf{(i)}\ J_1 = \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\, dx, \qquad \textbf{(ii)}\ J_2 = \int_{0}^{4} e^{-\frac{x^2}{4}+x}\, dx,$$

usando o método de Gauss-Legendre com dois nós de integração.

(b)[10] Determine um majorante inferior a 0.5 para o erro absoluto do valor aproximado obtido para o integral J_1. Note que

$$\frac{d^4}{dx^4}\, e^{-x^2} = 4e^{-x^2}(4x^4 - 12x^2 + 3), \qquad \frac{d^5}{dx^5}\, e^{-x^2} = -8xe^{-x^2}(4x^4 - 20x^2 + 15).$$

[5] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = e^{-x^2} + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

onde y_0 é uma constante real.

(a)[15] Obtenha um valor aproximado y_1 para $y(h)$, onde $h > 0$ é o passo de integração, pelo método do ponto médio.

(b)[15] Obtenha um valor aproximado $\tilde{y}_1$ para $y(h)$, onde $h > 0$ é o passo de integração, pelo método de Adams-Moulton de passo simples com ordem de consistência 2 $(p = 0, q = 2)$.

[6][15] Considere o método multipasso linear com três passos da forma

$$y_{n+1} = a_1 y_{n-1} + h\left[b_0 f(x_n, y_n) + b_1 f(x_{n-1}, y_{n-1}) + b_2 f(x_{n-2}, y_{n-2})\right].$$

Determine os valores dos coeficientes a_1, b_0, b_1, b_2 por forma a que o método tenha ordem de consistência três.

$\boxed{\text{24.JAN.2006}}$