

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO  
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica  
Ano Lectivo: 2004/2005

ANÁLISE NUMÉRICA

Exercícios

**4.1.** Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} x_1 = \frac{0.5}{1 + (x_1 + x_2)^2} \\ x_2 = \frac{0.5}{1 + (x_1 - x_2)^2} \end{cases}$$

**a)** Mostre que o sistema tem uma única solução  $z$  em  $\mathbb{R}^2$ .

**b)** Obtenha um valor aproximado  $x^{(4)}$  para a solução usando quatro iterações do método do ponto fixo. Apresente uma estimativa do erro  $\|z - x^{(4)}\|_\infty$ .

**4.2.** Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} x_1 - \frac{x_2}{4} \cos(x_1) = 0 \\ 1 - x_2 + |x_1 - 1| = 0 \end{cases}$$

**a)** Mostre que o sistema tem uma e uma só solução  $z \in [0, 1] \times [1, 2]$ .

**b)** Determine uma aproximação da solução pelo método do ponto fixo cujo erro absoluto seja inferior a 0.05.

**4.3.** Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} x_1 = f(x_1 + x_2) \\ x_2 = g(x_1 + x_2) \end{cases}$$

em que as funções  $f$  e  $g$  verificam  $|f'(t)| < \alpha$ ,  $|g'(t)| < \beta$ , para qualquer  $t \in \mathbb{R}$  e em que  $f(\mathbb{R}) \subseteq [a, b]$ ,  $g(\mathbb{R}) \subseteq [a, b]$ .

**a)** Mostre que existe uma única solução do sistema em  $\mathbb{R}^2$  se  $\alpha + \beta < 1$ , que essa solução se encontra em  $[a, b] \times [a, b]$ , e que o método do ponto fixo converge, quaisquer que sejam os valores iniciais em  $\mathbb{R}$ .

**b)** Reduza o sistema anterior à resolução de duas equações em  $\mathbb{R}$ , e mostre o mesmo resultado que em a).

**c)** Concretize os resultados anteriores para o sistema

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \cos(x_1 + x_2) - \cos^2\left(\frac{1}{5}(x_1 + x_2)\right) \\ x_2 = \sin\left(\frac{1}{3}(x_1 + x_2)\right) + \frac{1}{4} \sin^2(x_1 + x_2) \end{cases}$$

**d)** Começando com  $(0,0)$ , determine uma iterada pelo método de Newton em  $\mathbb{R}^2$  para a aproximação da solução do sistema anterior.

**4.4.** Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \varepsilon \cos(x_3) = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3\varepsilon x_1 x_3 = 0 \\ \varepsilon x_1^2 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

**a)** Mostre que para  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  o sistema tem uma solução única  $z$  no conjunto

$$D = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1|, |x_2|, |x_3| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

**b)** Usando a função iteradora

$$G(x) = \left( -\frac{1}{2} (x_2 + \varepsilon \cos(x_3)), -\frac{1}{3} (x_1 + 3\varepsilon x_1 x_3), -\frac{1}{3} (x_2 + \varepsilon x_1^2) \right),$$

mostre que, aplicando o método do ponto fixo, se tem

$$\|z - x^{(m)}\| \leq \frac{5^m}{6^{m-1}} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$$

qualquer que seja o vector inicial  $x^{(0)} \in D$ .

**c)** No caso  $\varepsilon = 0$ , mostre que o método de Jacobi converge e que temos

$$\|x^{(m)}\|_\infty \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m \|x^{(0)}\|_\infty$$

para qualquer  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ .

**4.5.** Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^2 - 3x_2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 3x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

**a)** Mostre que o sistema tem uma solução única  $z$  no conjunto

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_\infty \leq \frac{1}{3} \right\}.$$

**b)** Obtenha um valor aproximado  $x^{(2)}$  para a solução do sistema usando duas iterações do método do ponto fixo partindo da condição inicial  $x^{(0)} = [0 \ 0 \ 0]^T$ . Apresente uma estimativa do erro  $\|z - x^{(2)}\|_\infty$ .

c) Obtenha um valor aproximado  $\tilde{x}^{(2)}$  para a solução do sistema usando duas iteradas do método da Newton generalizado partindo da aproximação inicial  $\tilde{x}^{(0)} = [1 \ 1 \ 0]^T$ . Apresente uma estimativa do erro  $\|z - \tilde{x}^{(2)}\|_\infty$ .

Nota. Utilize o método de eliminação de Gauss para resolver os sistemas lineares que ocorrem na aplicação do método de Newton generalizado.

**4.6.** Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 2x_1 - \cos(x_1 + x_2) = 2 \\ 3x_2 - \sin(x_1 + x_2) = 6 \end{cases}$$

a) Mostre que o sistema tem uma solução única  $z$  no conjunto

$$D = \left[ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right] \times \left[ \frac{5}{3}, \frac{7}{3} \right],$$

e que esta é também a única raiz do sistema em  $\mathbb{R}^2$ .

b) Obtenha um valor aproximado  $x^{(2)}$  para a solução única  $z$  do sistema usando duas iteradas do método do ponto fixo partindo da condição inicial  $x^{(0)} = [1 \ 2]^T$ . Apresente uma estimativa do erro  $\|z - x^{(2)}\|_1$ .

c) Obtenha um valor aproximado  $\tilde{x}^{(2)}$  para a solução única  $z$  do sistema usando duas iteradas do método de Newton generalizado partindo da condição inicial  $\tilde{x}^{(0)} = [1 \ 2]^T$ . Apresente uma estimativa do erro  $\|z - \tilde{x}^{(2)}\|_1$ .

Nota. Utilize o método de eliminação de Gauss para resolver o sistema linear que ocorre na aplicação do método de Newton generalizado.

**4.7.** Considere um sistema de equações escrito na forma  $F(x) = 0$ , e seja  $J_F(x)$  a matriz jacobiana de  $F$  calculada em  $x$ .

a) Mostre que se existir um  $\omega \in \mathbb{R}$  tal que  $\|I + \omega J_F(x)\| \leq L < 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , então o sistema possui uma única solução em  $\mathbb{R}^n$ .

b) Conclua que o sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + \sin(x_3) = 1 \\ x_1 + 4x_2 + \cos(x_3) = 1 \\ \sin(x_1) + \cos(x_2) + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

tem uma única solução em  $\mathbb{R}^3$ , que está no conjunto  $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}] \times [-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}]$ .

c) Determine uma aproximação dessa solução calculando duas iterações pelo método de Newton, começando com a iterada inicial  $x^{(0)} = 0$ .

**4.8.** Pretende-se resolver pelo método de Newton o seguinte sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2(x_3 + 1) = 10 \\ 3(x_2 + 1) + x_3^2 = 11 \\ 3x_1 + x_3^2 = 9 \end{cases}$$

tomando como aproximação inicial  $x^{(0)} = [3 \ 2 \ 1]^T$ .

**a)** Mostre que o sistema linear  $Ax = b$  a ser resolvido para se obter  $x^{(1)}$  é tal que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Obtenha ainda o vector  $b$ .

**b)** Resolva o sistema linear obtido em a), pelo método de eliminação de Gauss com pesquisa parcial de pivot, e obtenha  $x^{(1)}$ .

**4.9.** Pretende-se resolver pelo método de Newton o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} e^{x_1} - 3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1^2 + 2x_1 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

**a)** Tomando como aproximação inicial  $x^{(0)} = [0 \ 1 \ 2]^T$ , ao efectuar uma iteração pelo método de Newton, somos conduzidos a resolver um certo sistema de equações lineares. Qual?

**b)** Resolva o sistema de equações lineares obtido na alínea anterior, utilizando o método de Gauss-Seidel, considerando como aproximação inicial o vector nulo e efectuando duas iterações.

**4.10.** Considere o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\begin{cases} x_1^3 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ e^{x_2} - x_3^2 = 1 \\ -x_1^2 + x_2 + x_3 = \mu \end{cases}$$

onde  $\mu$  é um número real conhecido, próximo de 0. Para aproximar uma solução deste sistema pretende-se utilizar o método de Newton. Tomando como aproximação inicial o vector  $x^{(0)} = [c \ 0 \ 0]^T$ , onde  $c$  é um certo número real, para obter a aproximação  $x^{(1)}$  somos levados a resolver um sistema linear com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3c^2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2c & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**a)** Mostre como se obteve esta matriz e calcule o segundo membro do sistema.

**b)** Mostre que a matriz  $A$  pode ser escrita na forma  $A = LU$ , onde  $L$  é uma matriz triangular inferior com diagonal principal unitária e  $U$  é uma matriz triangular superior. Utilize este resultado para concluir para que valores de  $c$  o sistema linear considerado tem solução única.

**c)** No caso de  $c = 1$ , utilize o resultado  $A = LU$  para resolver o sistema linear e calcule  $x^{(1)}$  (primeira iterada do método de Newton).

**d)** No caso de se aplicar o método de Jacobi para resolver o sistema linear, diga para que valores de  $c$  está garantida a condição necessária e suficiente de convergência do método.

**4.11.** Considere o sistema não linear

$$\begin{cases} x_1^2 + x_1x_2^3 = 9 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 = 4 \end{cases}$$

Investigue a existência de soluções para o sistema utilizando o método de Newton generalizado com diferentes aproximações iniciais.