

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2004/2005

ANÁLISE NUMÉRICA

Exame de 16 de Julho de 2005

Duração: 3 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[1]¹⁰ Considere os números

$$a = \sum_{k=1}^{3000} (k+1)^3 = 20\,290\,529\,259\,000,$$
$$b = \sum_{k=1}^{3000} (k^2 + 3k + 3)k = 20\,290\,529\,256\,000.$$

Diga justificadamente como é que o valor de $a-b$, calculado num sistema $FP(10, n, -30, 30)$, com arredondamento simétrico, depende do número de dígitos da mantissa, n .

[2] Considere o sistema linear $A_\varepsilon x_\varepsilon = b_\varepsilon$, onde

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 + \varepsilon & 2 \end{bmatrix}, \quad b_\varepsilon = \begin{bmatrix} 3 + \varepsilon \\ 1 \end{bmatrix};$$

ε é um parâmetro real.

(a)²⁰ Calcule os números de condição da matriz A_0 relativos à norma matricial associada à norma vectorial da soma e ao raio espectral,

$$\text{cond}_1(A_0), \quad \text{cond}_*(A_0).$$

(b)²⁰ Sabendo que o sistema $A_0 x_0 = b_0$ tem a solução $x_0 = (-1, 2)$, determine, sem resolver o sistema $A_\varepsilon x_\varepsilon = b_\varepsilon$, um majorante para a diferença $x_\varepsilon - x_0$ expresso em termos do parâmetro ε . Use a norma vectorial da soma e a norma matricial associada.

[3] Considere o sistema de equações algébricas não-lineares

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = g(x), \tag{S}$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} x_1 + \frac{1}{2} \sin(x_1 + x_2) - \frac{1}{2} \\ x_2 - \frac{1}{4} \cos(x_1 - x_2) \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin(x_1 + x_2) \\ \frac{1}{4} \cos(x_1 - x_2) \end{bmatrix}.$$

v.s.f.f.

(a)¹⁵ Mostre que o sistema (S) tem uma solução única z no conjunto

$$D = [-1, 1] \times [-1, 1],$$

e que esta é também a única solução de (S) em $\mathbb{R}^2$.

(b)¹⁵ Calcule quantas iteradas do método do ponto fixo com função iteradora g e condição inicial $x^{(0)} = (0, 0)$ seriam necessárias para obter uma aproximação da solução do sistema (S) com um erro absoluto inferior a 10^{-6} .

(c)²⁰ Determine uma aproximação da solução do sistema (S) usando uma iterada do método de Newton generalizado com condição inicial $x^{(0)} = (0, 0)$.

[4]²⁰ Usando a fórmula de interpolação de Newton de uma função $f \in C^2([a, b])$ nos pontos a, b ,

$$f(x) = f[a] + f[a, b](x - a) + f[a, b, x](x - a)(x - b),$$

mostre que

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi),$$

onde $\xi \in]a, b[$.

[5]²⁰ Determine a fórmula de quadratura de Gauss com dois nós de integração para aproximar o integral

$$I(f) = \int_0^4 f(x) dx, \quad f \in C([0, 4]).$$

[6] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \phi''(t) + \sin \phi(t) = 0, & t \geq 0, \\ \phi(0) = \phi_0, \quad \phi'(0) = v_0, \end{cases}$$

onde ϕ_0, v_0 são constantes reais.

(a)²⁰ Obtenha valores aproximados para $\phi(2h)$ e $\phi'(2h)$, usando dois passos de comprimento h do método de Euler.

(b)²⁰ Obtenha valores aproximados para $\phi(2h)$ e $\phi'(2h)$, usando um passo de comprimento $2h$ do método de Runge-Kutta clássico de 2^a ordem.

[7] Considere o método multipasso linear com dois passos da forma

$$y_{n+1} = a_1 y_{n-1} + h [b_0 f(x_n, y_n) + b_1 f(x_{n-1}, y_{n-1})].$$

(a)¹⁰ Determine os coeficientes a_1, b_0, b_1 por forma a que o método tenha ordem de consistência 2.

(b)¹⁰ Determine a expressão do erro de discretização local do método da alínea (a) quando aplicado para obter uma solução aproximada da equação $y'(x) = x + [y(x)]^2$.