

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2004/2005

ANÁLISE NUMÉRICA

Exame de 30 de Junho de 2005

Duração: 3 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[1]²⁰ Considere a solução do sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ d \end{bmatrix},$$

onde a, b, c, d são números reais, $c \neq ab$, pelo método de eliminação de Gauss. Supondo que são apenas conhecidos valores aproximados $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}$ de a, b, c, d e que as operações aritméticas envolvidas no cálculo da solução do sistema têm erros de arredondamento não nulos, determine a expressão do erro relativo dos valores aproximados $\tilde{x}, \tilde{y}$ de x, y .

[2]²⁰ Determine com um erro absoluto inferior a 10^{-3} a raiz real da equação

$$x^3 + 2x^2 - x - 3 = 0.$$

Utilize o método de Newton.

[3]³⁰ Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix},$$

onde α, β são números reais. Suponha que pretende resolver o sistema $AX = B$, onde B é um vector arbitrário, pelo método de Jacobi modificado com parâmetro real ω . Determine:

(a) O intervalo de valores de ω para os quais o método converge para a solução do sistema para qualquer valor inicial.

(b) O valor de ω para o qual o método converge mais rapidamente.

[4] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f \in C(\mathbb{R})$:

k	0	1	2	3
$f(k)$	-3	-1	11	39

(a)¹⁵ Determine o polinómio interpolador de f , p_3 , nos pontos da tabela. Escreva o resultado na forma $p_3(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$.

(b)¹⁵ Supondo que f é estritamente crescente para $x > 0$ determine a raiz positiva de f pelo método da interpolação inversa.

(c)²⁰ Verifique que os polinômios $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ definidos por

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = 1 - \frac{2x}{3}, \quad \varphi_2(x) = 1 - 3x + x^2,$$

são ortogonais entre si com respeito ao produto interno

$$\langle g, h \rangle = \sum_{k=0}^3 g(k)h(k), \quad \forall g, h \in C(\mathbb{R}).$$

(d)²⁰ Determine os valores de a_0, a_1, a_2 que minimizam o erro

$$E(a_0, a_1, a_2) = \langle f - \phi, f - \phi \rangle, \quad \phi = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2.$$

[5]²⁰ Sabendo que o erro de integração da fórmula de Gauss-Legendre de ordem n para aproximar o integral $I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx$ é dado por

$$E_n(f) = k_n f^{(2n+2)}(\xi), \quad k_n = \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3}, \quad \xi \in]-1, 1[$$

mostre que o erro da fórmula de Gauss-Legendre composta de ordem n com M subintervalos para aproximar o integral $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ é dado por

$$E_n^{(M)}(f) = \frac{b-a}{2} \left(\frac{h_M}{2} \right)^{2n+2} k_n f^{(2n+2)}(\eta), \quad h_M = \frac{b-a}{M}, \quad \eta \in]a, b[.$$

[6] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) = g(x, y(x)) := 2[y(x)]^3 + xy(x) + \lambda, & x \geq x_0, \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = z_0, \end{cases}$$

onde $x_0, y_0, z_0, \lambda \in \mathbb{R}, |y_0| + |z_0| \neq 0$. Obtenha valores aproximados y_1, z_1 para $y(h), y'(h)$, respectivamente, onde $h > 0$ é o passo de integração:

(a)²⁰ pelo método de Taylor de ordem 2;

(b)²⁰ pelo método de Euler modificado.