INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2003/2004

ANÁLISE NUMÉRICA

Exame de 20 de Julho de 2004

Duração: 3 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[1]^{20} Considere os números reais $b \neq c$ e

$$z = \exp\left\{\frac{b+c}{b-c}\right\}.$$

Supondo que são apenas conhecidos valores aproximados $\tilde{b}, \tilde{c}$ de b, c e que as quatro operações envolvidas no cálculo de z, adição, subtracção, divisão e exponenciação, têm erros de arredondamento $\delta_A, \delta_S, \delta_D, \delta_E$, respectivamente, determine a expressão do erro relativo do valor aproximado $\tilde{z}$ de z.

[2] Considere o polinómio do 3º grau

$$p(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 16.$$

(a)^{15} Mostre que o polinómio p tem três raízes reais $z_1 < z_2 < z_3$ tais que

$$z_1 \in [1.0, 1.2], \qquad z_2 \in [2.5, 3.0], \qquad z_3 \in [4.8, 5.3].$$

(b)^{20} Mostre que apenas uma das três raízes de p, z_3, pode ser aproximada pelo método do ponto fixo com a função iteradora $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = 9 - \frac{23}{x} + \frac{16}{x^2}.$$

(c)^{20} Determine um valor aproximado da raiz z_3 pelo método do ponto fixo com a função iteradora g da alínea (b) e aproximação inicial $x_0 = 5.3$ com um erro absoluto inferior a 0.1.

[3] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

x_i	0	2	4
$f(x_i)$	-16	2	-4

(a)^{10} Determine o polinómio interpolador de f, p_2, nos pontos da tabela pela fórmula de Newton às diferenças divididas.

(b)^{15} Sabendo que $f[2, 4, 6] = 3$ determine o polinómio interpolador de f, p_3, nos pontos da tabela e no ponto $x = 6$.

v.s.f.f.

(c)[20] Sabendo que $f(6)=14$ determine os valores das constantes a, b que minimizam o erro quadrático

$$E(a,b)=\sum_{i=0}^{3}\left[f(x_i)-a\cos\left(\frac{\pi}{2}\,x_i\right)-bx_i\right]^2,$$

onde $x_i=2i,\ i=0,1,2,3.$

(d)[20] Sabendo que $f(1)=f(3)=-1$ determine aproximações $I_2^{(2)}(f)$ e $I_2^{(4)}(f)$ para o integral $I(f)=\int_0^4 f(x)\,dx$ pela regra de Simpson com dois e quatro subintervalos, respectivamente.

[4][20] Sabendo que o erro de integração da fórmula de quadratura

$$Q(f)=\frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right],$$

usada para aproximar o integrar

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,dx,$$

é da forma

$$I(f)-Q(f)=Kf''(\xi),$$

onde $f\in C([a,b]),\ K$ é uma constante independente de f, e $\xi\in[a,b]$, determine K.

[5][20] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x)=4x^2\,\sin\left(y(x)\right), \\ y(0)=1. \end{cases}$$

Obtenha um valor aproximado y_1 para $y(0.5)$ usando um passo de comprimento $h=0.5$ do método de Adams-Moulton com $p=0$ $(q=2)$.
Nota. Para resolver a equação que determina implicitamente y_1 utilize uma iterada do método da secante, escolhendo valores iniciais que verifiquem as condições suficientes de convergência do método da secante no intervalo $[0,2]$.

[6][20] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x)=x^2y(x), \\ y(x_0)=\alpha, \quad y'(x_0)=\beta, \end{cases}$$

onde $x_0\geq 0, \alpha,\beta\in\mathbb{R}, |\alpha|+|\beta|\neq 0.$ Mostre que o valor aproximado y_1 para $y(x_1),\ x_1=x_0+h$, obtido usando um passo de comprimento $h\in]0,h_M[$ do método de Adams-Moulton com $p=0$ $(q=2)$, é dado por

$$y_1=\frac{\left[1+\left(hx_0/2\right)^2\right]\alpha+h\beta}{1-\left(hx_1/2\right)^2},$$

onde $h_M=\sqrt{\left(x_0/2\right)^2+2}-x_0/2.$

$\boxed{\text{20.JUL.2004}}$