INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2003/2004

ANÁLISE NUMÉRICA

Exame de 3 de Julho de 2004

Duração: 3 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[1]^{20} Determine por que ordem (crescente ou decrescente) se devem somar $N \geq 3$ números reais positivos num sistema de ponto flutuante por forma a garantir o menor erro de arredondamento possível na soma. Admita que os números reais a somar são representados exactamente no referido sistema de ponto flutuante.

[2] Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável e tal que

$$f(-1) = \frac{1}{4}, \qquad f(1) = \frac{3}{4}, \qquad \max_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)| = \frac{1}{3}.$$

Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$g(x) = \begin{bmatrix} f(x_1 - x_2) \\ f(x_1 + x_2) \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(a)^{20} Mostre que a sucessão $\left\{x^{(m)}\right\}$ gerada por $x^{(m+1)} = g(x^{(m)}),\ m \geq 0,\ x^{(0)} = [0\ 1]^T$ converge para $z \in \mathbb{R}^2$.

(b)^{15} Mostre que $z \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \times \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right]$.

(c)^{15} Determine M tal que $\|x^{(m)} - z\|_\infty \leq 0.001, \quad \forall m \geq M$. Note que $\log_{10} 2 \approx 0.301$ e $\log_{10} 3 \approx 0.477$.

[3] Considere o sistema de equações $Ax = c$, onde A é a matriz de elementos reais da forma

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \\ b_3 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & a_4 \end{bmatrix}.$$

(a)^{10} Indique condições suficientes sobre as entradas da matriz A por forma a garantir convergência simultânea dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel para a solução do sistema para qualquer condição inicial.

(b)^{15} Indique condições necessárias e suficientes sobre as entradas da matriz A por forma a garantir convergência do método de Jacobi para a solução do sistema para qualquer condição inicial.

[4] Os polinómios de Hermite, $H_n, n \in \mathbb{N}$, definidos pela relação de recorrência

$$\begin{cases} H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), & n \geq 1, \\ H_0(x) = 1, \qquad H_1(x) = 2x, \end{cases}$$

satisfazem à relação de ortogonalidade

$$\langle H_m, H_n \rangle = \sqrt{\pi}\, 2^n\, n!\, \delta_{mn},$$

com respeito ao produto interno $\langle g, h \rangle = I(gh)$, onde

$$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\, dx.$$

f, g e h são quaisquer funções contínuas em $\mathbb{R}$ para as quais o integral converge.

(a)^{15} Determine os polinómios H_2, H_3 e H_4.

(b)^{20} Determine $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ que minimiza

$$J(a, b, c) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \left(a + bx + cx^2 - x^3 - x^4\right)^2 dx.$$

(c)^{20} Determine a fórmula de integração de Gauss-Hermite com dois nós de integração

$$I_1(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1),$$

que aproxima o integral $I(f)$.

[5] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) - 2xy'(x) + 6y(x) = 0, \\ y(0) = 0, \qquad y'(0) = -12. \end{cases}$$

(a)^{20} Obtenha valores aproximados y_1 e $(y')_1$ para $y(h)$ e $y'(h)$ usando um passo do método de Runge-Kutta de 2ª ordem propriamente dito com passo de integração $h > 0$.

(b)^{10} Sendo $y_1 = -12h$ e $(y')_1 = 12(-1 + 2h^2)$ os valores que devia ter obtido na alínea (a) e $y(x) = 4x(-3 + 2x^2)$ a solução exacta do problema de valor inicial interprete a diferença entre os valores aproximados e os valores exactos.

[6]^{20} Determine a expressão geral dos métodos multipasso lineares da forma

$$y_{n+1} = y_{n-1} + h\left[b_0 f(x_n, y_n) + b_1 f(x_{n-1}, y_{n-1}) + b_2 f(x_{n-2}, y_{n-2})\right],$$

com ordem de consistência três. Diga justificadamente se estes métodos são ou não convergentes.

$\boxed{\text{3.JUL.2004}}$