Matemática Computacional

Ficha 4

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	3	4	2

   (a) Determine uma expressão para o polinómio $p_2(x)$ de grau ≤ 2 que interpola f nos **pontos** $0,\ 2,\ 4$ da tabela.

   (b) A partir do polinómio obtido na alínea anterior, determine o polinómio $p_3(x)$, de grau ≤ 3, que interpola f nos pontos todos da tabela.

   (c) Supondo que $f(x) = exp(-x) + a_2x^2 + a_1x + a_0$, determine majorantes para os erros de interpolação $|f(1.5) - p_j(1.5)|$, onde $p_j, j = 2, 3$, são os o polinómios das alíneas anteriores.

   (d) Determine a função da forma $g(x) = a_0 + a_1\, x/(x+1)^2$ que melhor se ajusta aos **três primeiros** pontos da tabela, no sentido dos mínimos quadrados.

   Ex. das listas - em Fénix- link Material de estudo :

   MIN. QUADRADOS

2. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	6	3	2	1

   Pretende-se um ajustamento dos pontos da tabela por uma função do tipo

$$g(x) = \frac{1}{Ax + B}.$$

   Determine as constantes A, B pelo método dos mínimos quadrados. (*EXAME 18.01.93*)

   Sol.

   Note que $g(x)$ não é da forma $\alpha_0\phi_0(x)+\alpha_1\phi_1(x)$, ou seja, não se trata dum ajustamento linear. Contudo, como a função $G(x) = 1/g(x) = Ax + B$ é da forma acima, pode considerar o novo problema de aproximar a tabela de pontos $F_i = 1/f_i$ por $G = 1/g$. Construa a aproximação G pelo critério dos mínimos quadrados. Em seguida, conclua que $A = 11/30$ e $B = 4/15$.

   INTERPOLAÇÃO:

3. Considere a seguinte tabela de valores da função $f(x) = log_{10}x$:

x_i	2.0	2.5	3.0
$\log_{10} x_i$	0.30103	0.39794	0.47712

(a) Usando a fórmula de Newton e todos os pontos da tabela, calcule uma aproximação de $f(2.4)$.

Sol: $f(2.4) \simeq p_2(2.4) = 0.379976$

(b) (i) Determine um majorante do erro absoluto cometido ao aproximar $f(2.4)$ pelo valor obtido com o polinómio construído. (ii) Determine ainda um majorante para o erro associado à aproximação de $f(x)$, quando x é um ponto qualquer de $[2,3]$. Compare com o erro do resultado obtido em (i) para o caso particular de $x = 2.4$.

Sol.: Considere a fórmula do erro de interpolação particularizada para o caso $n = 2$. *Sugestão: (ii)* $f(x) - p_2(x)| \leq \frac{0.108574}{6} 0.0481125 \simeq 0.0008706$

4. Considere a seguinte tabela de valores:

x_i	-3	-1	1	3
f_i	-33	14	-2	-5

Sabendo que a função tabelada é contínua e estritamente monótona em $[-1,3]$, determine por **interpolação inversa** o zero da função situado no intervalo $[-1,1]$, utilizando o maior número possível de pontos. Justifique a escolha dos nós de interpolação.

Sol.: pretende-se o valor z *tal que* $f(z) = 0$, *ou seja, pretende-se uma aproximação para* $z = f^{-1}(0)$. *Note que* z *deve estar entre -1 e 1. Seja* $g(y) = f^{-1}(y)$. *Faça uma tabela para a função* g, *"invertendo" a tabela dada.*
Vem $P_2(y) = -1 - 0.125(y - 14) + 0.02851(y - 14)(y + 2)$. *No final vai obter* $z \simeq P_2(0) = -0.0482464$.

5. Seja f uma função que nos nós $\{-1, 1, 3\}$ tem como polinómio interpolador $p_2(x) = 3 - 2x + 6x^2$.

(a) Sabendo que $f[-1, 1, 2] = 4$, calcule o polinómio p_3 que interpola f nos nós anteriores e também em $x_3 = 2$.

(b) Sabendo ainda que $f^{(iv)}(x) = 78$, para todo $x \in \mathbf{R}$, determine a expressão analítica de f.