Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

2º Teste/1º Exame - 11 de Janeiro de 2010
Duração: Teste - 1h30m ; Exame - 3h
Apresente e justifique todos os cálculos

Resolução abreviada

ATENÇÃO: O 2º Teste corresponde às perguntas 5 a 10.

1. Seja $f(x,y) = \sqrt{\frac{y}{x}}$.

(0.5 val.) a) Determine o domínio de f e a respectiva fronteira.

Resolução:
O domínio de f é o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por $x \neq 0$; $\frac{y}{x} \geq 0$, ou seja,

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \ ; \ y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \ ; \ y \leq 0\}.$$

A respectiva fronteira será a união dos eixos coordenados, ou seja,

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}.$$

(1.0 val.) b) Estude a existência do limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Resolução:

Note-se que, para $x \neq 0$; $m > 0$, temos $f(x,mx) = \sqrt{\dfrac{mx}{x}} = \sqrt{m}$ e, portanto, o limite em causa não existe.

(2.0 val.) c) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, de classe C^1, tal que $g'(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calcule a derivada $D_v(g \circ f)(1,4)$, sendo $v = (1,1)$.

Resolução:

$$D_v(g \circ f)(1,4) = D(g \circ f)(1,4)v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

(1.5 val.) 2. Classifique os pontos de estacionaridade da função $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Resolução:

Os pontos de estacionaridade de f são as soluções do sistema

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases},$$

ou seja, são os pontos $(0,0)$, $(1,1)$.

Para os classificar recorremos à matriz hessiana

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios de $H(0,0)$ são as soluções de $\lambda^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \vee \lambda = -3$, ou seja, $(0,0)$ não é um ponto de extremo de f.

Os valores próprios de $H(1,1)$ são as soluções de $(6-\lambda)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \vee \lambda = 9$, ou seja, $(1,1)$ é um ponto de mínimo de f.

(1.5 val.) 3. Determine, de entre todos os paralelipípedos de área igual a 6, o de maior volume.

Resolução:

Sejam, respectivamente, $x > 0$; $y > 0$; $z > 0$ o comprimento, a largura e a altura de um paralelipípedo. Assim, deveremos determinar os extremos de $f(x,y,z) = xyz$ sujeitos à condição $F(x,y,z) = xy + yz + xz = 3$.

Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, teremos,

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla F(x,y,z) \\ F(x,y,z) = 3, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} yz = \lambda(y+z) \\ xz = \lambda(x+z) \\ xy = \lambda(x+y) \\ xy + yz + xz = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-x)z = \lambda(y-x) \\ (z-y)x = \lambda(z-y) \\ xy = \lambda(x+y) \\ xy + yz + xz = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-x)(z-\lambda) = 0 \\ (z-y)(x-\lambda) = 0 \\ xy = \lambda(x+y) \\ xy + yz + xz = 3, \end{cases}$$

de onde se conclui que a única solução corresponde a $x = y = z = 1$, ou seja, o cubo de lado um é o paralelipípedo de área igual a 6 que apresenta o maior volume.

4. Seja

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 + x \; ; \; x^2 + y^2 = 1\}.$$

(1.0 val.) a) Mostre que M é uma variedade e determine a sua dimensão.

Resolução:

M é o conjunto de nível zero da função $F(x,y,z) = (z-1-x, x^2+y^2-1)$. Dado que $x^2+y^2=1$, a característica da matriz

$$DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \end{bmatrix}$$

será 2 em M e, portanto, $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma variedade de dimensão 1.

(1.0 val.) b) Determine a recta tangente a M no ponto $(1,0,2)$.

Resolução:

As linhas da matriz $DF(1,0,2)$ geram o espaço normal a M nesse ponto e, portanto, a respectiva recta tangente será dada por

$$\begin{cases} (x-1, y, z-2) \cdot (-1,0,1) = 0 \\ (x-1, y, z-2) \cdot (2,0,0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ x = 1 \end{cases},$$

ou seja, é uma recta paralela ao eixo Oy.

(1.5 val.) c) Justifique que numa vizinhança de $(1,0,2)$ a variedade M pode ser descrita como o gráfico de uma função de classe C^1 da forma $f(y) = (x(y), z(y))$. Calcule $f'(0)$.

Resolução:

Note-se que

$$\det D_{x,z}F(1,0,2) = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -2 \neq 0$$

e, portanto, pelo teorema da função implícita, M pode ser descrita como o gráfico de uma função de classe C^1 da forma $f(y) = (x(y), z(y))$.

Dado que $D_yF(1,0,2) = (0,0)$ e $f'(0) = -\left[D_{x,z}F(1,0,2)\right]^{-1} D_yF(1,0,2)$, teremos $f'(0) = (0,0)$.

ATENÇÃO: Início do 2º Teste. A cotação de cada pergunta do 2º teste é o dobro da cotação indicada.

5. Considere o conjunto

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1 \; ; \; 0 < y < 1 \; ; \; 0 < z < x+y\}.$$

(2.0 val.) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$ e outra da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

Resolução:

Na forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$ teremos

$$\text{vol}(V) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{x+y} dz\right) dy\right) dx,$$

e na forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$,

$$\begin{aligned}\text{vol}(V) &= \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_{z-y}^1 dx\right) dy\right) dz + \int_0^1 \left(\int_z^1 \left(\int_0^1 dx\right) dy\right) dz + \\ &+ \int_1^2 \left(\int_{z-1}^1 \left(\int_{z-y}^1 dx\right) dy\right) dz\end{aligned}$$

(1.5 val.) 6. Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule a massa do sólido

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 \; ; \; z > 0 \; ; \; \sqrt{x^2+z^2} < y < 2 - x^2 - z^2\},$$

cuja densidade de massa é constante e igual a um.

Resolução:

Nas coordenadas cilíndricas (ρ, θ, y) teremos

$$\rho < y < 2 - \rho^2 \; ; \; 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \; ; \; 0 < \rho < 1$$

e, portanto, a massa será dada pelo integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \left(\int_\rho^{2-\rho^2} \rho dy\right) d\rho\right) d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho(2-\rho^2-\rho) d\rho = \frac{5\pi}{24}.$$

(1.5 val.) 7. Calcule a coordenada $\overline{z}$ do centro de massa do fio descrito pelo caminho

$$g(t) = (t \operatorname{sen} t, t\cos t, t) \; ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

e cuja densidade de massa é a função $\sigma(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{2+z^2}}$.

Resolução:

Note-se que $||g'(t)|| = \sqrt{2+t^2}$.

A massa do fio é dada pelo integral

$$\int_0^{2\pi} \sigma(g(t))||g'(t)||dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2+t^2}}{\sqrt{2+t^2}} dt = 2\pi.$$

Portanto,

$$\overline{z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(g(t))z(t)||g'(t)||dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t dt = \pi$$

8. Considere o campo vectorial

$$F(x,y,z) = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - x \,,\, -\frac{x}{x^2+y^2} + y \,,\, \cos(z^2) \right).$$

(1.0 val.) a) Calcule o trabalho realizado por F ao longo da linha definida por $4x^2 + y^2 = 1 \;;\; z = 0$, no sentido positivo quando vista do ponto $(0,0,10)$.

Resolução:

Seja Γ a linha em causa.

Note-se que $F = G + H$ sendo G e H campos fechados ($\nabla \times G = 0 \;;\; \nabla \times H = 0$) dados por

$$G(x,y,z) = \left(\frac{y}{x^2+y^2} \,,\, -\frac{x}{x^2+y^2} \,,\, 0 \right) \;;\quad H(x,y,z) = (-x, y, \cos(z^2)).$$

Usando o teorema de Stokes na superfície descrita por $z = 0 \;;\; 4x^2 + y^2 < 1$, o trabalho de H em Γ será nulo. Alternativamente, sendo H fechado em $\mathbb{R}^3$ e Γ homotópica a um ponto, a conclusão é a mesma.

Usando o teorema de Stokes na superfície descrita por $z = 0 \;;\; 4x^2 + y^2 < 1 \;;\; x^2 + y^2 > 1$, o trabalho de G em Γ será igual ao trabalho de G na circunferência $z = 0 \;;\; x^2 + y^2 = 1$, percorrida no mesmo sentido de Γ, ou seja -2π. Alternativamente, sendo G fechado no seu domínio e Γ homotópica à circunferência, a conclusão é a mesma.

Portanto, o trabalho realizado por F será -2π.

(1.0 val.) b) Calcule o trabalho realizado por F ao longo da linha definida por $x^2 + z^2 = 1 \;;\; y = 1$, no sentido positivo quando vista do ponto $(0,10,0)$.

Resolução:

Sendo F fechado o trabalho é nulo porque podemos usar o teorema de Stokes na superfície definida por $x^2 + z^2 < 1 \;;\; y = 1$, ou invocar o facto de que a linha $x^2 + z^2 = 1 \;;\; y = 1$, é homotópica a um ponto.

(1.5 val.) 9. Use o teorema da divergência para calcular o fluxo do campo $F(x,y,z) = (-yz, xz, 2)$ através da superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = x^2 + y^2 \;;\; z < 4\},$$

orientada com a normal com terceira componente negativa.

Resolução:

É claro que div$F = 0$.

Usando o teorema da divergência no domínio

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 < z < 4\},$$

obtemos,

$$0 = \int_S F \cdot \nu_S + \int_S F \cdot \nu_T$$

em que $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 < 4 \;;\; z = 4\}$ e $\nu_T = (0,0,1)$.

Portanto,

$$\int_S F \cdot \nu_S = -\int_S F \cdot \nu_T = -2\,\text{área}(T) = -8\pi.$$

(1.5 val.) 10. Seja $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ um campo vectorial de classe C^1, fechado e tal que $\oint_C F \cdot dg = 2\pi$, sendo C a circunferência de raio um e centro na origem e percorrida uma vez no sentido positivo. Mostre que existe um campo escalar $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\,,\,\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \nabla\phi.$$

Resolução:

Seja

$$G(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\,,\,\frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Note-se que $\displaystyle\oint_C G \cdot dg = 2\pi$ e, portanto, $\displaystyle\oint_C (F-G) \cdot dg = 0.$

Assim, sendo $F-G$ um campo fechado, pelo teorema de Stokes ou por homotopia, concluímos que $\displaystyle\oint_\Gamma (F-G) \cdot dg = 0$ para qualquer linha fechada Γ em $\mathbb{R}^2$.

Portanto, o campo $F-G$ é um gradiente, ou seja, $F = G + \nabla\phi$.