Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Todos os cursos excepto MEBiom, MEFT, LMAC
Teste de Recuperação - 18 de Junho de 2008 - 9h
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste 1

(3 val.) 1. Calcule ou mostre que não existe o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, tal que $\nabla f(0,1) = (0,1)$. Seja ainda $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x,y) = f(y, \cos x)$.

(2 val.) (a) Mostre que $(0,0)$ é um ponto de estacionaridade ou ponto crítico de φ.

(2 val.) (b) Sabendo que a entrada $(1,1)$ da matriz hessiana de f no ponto $(0,1)$ é -2, mostre que a matriz hessiana de φ no ponto $(0,0)$ é $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

(2 val.) (c) Classifique o ponto de estacionaridade $(0,0)$ de φ.

(3 val.) 3. Determine uma base para o espaço tangente ao cone

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$$

no ponto $(3,4,5)$.

4. Seja $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y,z,w) = (x-z)^2 + (y-w)^2$.

(3 val.) (a) Justifique que a equação $f(x,y,z,w) = 2$ define w como uma função ϕ de (x,y,z), de classe C^1, numa vizinhança do ponto $(1,-1,0,0)$. Calcule $D\phi(1,-1,0)$.

(2 val.) (b) Use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar os pontos das curvas $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x-1\}$ e $P = \{(z,w) \in \mathbb{R}^2 : w = z^2\}$ mais próximos entre si. Sugestão: note que a função f calcula o quadrado da distância entre os pontos (x,y) e (z,w).

(3 val.) 5. Seja $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que a função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x,0)$ tem um ponto de estacionaridade (ou ponto crítico) em $x = 0$ e a matriz hessiana, $H_g(0)(= D^2 g(0))$, de g na origem satisfaz $\det H_g(0) \neq 0$. Mostre que a função $g_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$g_t(x) = f(x,t)$$

tem um ponto de estacionaridade numa vizinhança da origem, para t suficientemente pequeno.

Cálculo Diferencial e Integral II

Todos os cursos excepto MEBiom, MEFT, LMAC
Teste de Recuperação - 18 de Junho de 2008 - 9h
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste 2

1. Considere a região $V \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 + z^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

(3,5 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de V da forma

$$\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} dy \right) dx \right) dz.$$

(3,5 val.) b) Calcule a massa total de V sabendo que a densidade de massa é dada por $\alpha(x, y, z) = 1 + z^2$.

(3 val.) 2. Calcule a carga do fio com a configuração da linha

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,\ 2z = y\},$$

sabendo que a densidade de carga é dada por $\sigma(x, y, z) = \sqrt{1 + 4x^2}$.

3. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2,\ z > 0\},$$

orientada com a normal unitária n, tal que $n_z > 0$. Seja $F(x, y, z) = (x, y, -2z)$.

(4 val.) a) Utilize o teorema de Stokes para calcular o fluxo de F através de S no sentido de n.

(3 val.) b) Calcule o trabalho do campo

$$H(x, y, z) = \left(\frac{-2(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} + z, \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2}, x \right),$$

ao longo do bordo de S, percorrido no sentido anti-horário relativamente ao ponto $(0, 1, 10)$. Diga, justificando, se H é um campo gradiente no seu domínio.

(3 val.) 4. Use o Teorema de Green para obter uma fórmula para a área de um pentágono cujos vértices são $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \cdots, 5$, ligadas por arestas P_1P_2, P_2P_3, etc.