Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

# Cálculo Diferencial e Integral II

2º Teste/1º Exame - 11 de Janeiro de 2010
Duração: Teste - 1h30m ; Exame - 3h
**Apresente e justifique todos os cálculos**

**ATENÇÃO: O 2º Teste corresponde às perguntas 5 a 10.**

1. Seja $f(x,y) = \sqrt{\frac{y}{x}}$.

(0.5 val.) a) Determine o domínio de $f$ e a respectiva fronteira.

(1.0 val.) b) Estude a existência do limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(2.0 val.) c) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, de classe $C^1$, tal que $g'(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calcule a derivada $D_v(g \circ f)(1,4)$, sendo $v = (1,1)$.

(1.5 val.) 2. Classifique os pontos de estacionaridade da função $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

(1.5 val.) 3. Determine, de entre todos os paralelipípedos de área igual a 6, o de maior volume.

4. Seja

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 1 + x \ ; \ x^2 + y^2 = 1\}.$$

(1.0 val.) a) Mostre que $M$ é uma variedade e determine a sua dimensão.

(1.0 val.) b) Determine a recta tangente a $M$ no ponto $(1,0,2)$.

(1.5 val.) c) Justifique que numa vizinhança de $(1,0,2)$ a variedade $M$ pode ser descrita como o gráfico de uma função de classe $C^1$ da forma $f(y) = (x(y), z(y))$. Calcule $f'(0)$.

**ATENÇÃO: Início do** $2^{\underline{o}}$ **Teste**. A cotação de cada pergunta do $2^{\underline{o}}$ teste é o dobro da cotação indicada.

5. Considere o conjunto

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1 \; ; \; 0 < y < 1 \; ; \; 0 < z < x + y\}.$$

(2.0 val.) Escreva uma expressão para o volume de $V$ em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$ e outra da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(1.5 val.) 6. Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule a massa do sólido

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 \; ; \; z > 0 \; ; \; \sqrt{x^2+z^2} < y < 2 - x^2 - z^2\},$$

cuja densidade de massa é constante e igual a um.

(1.5 val.) 7. Calcule a coordenada $\overline{z}$ do centro de massa do fio descrito pelo caminho

$$g(t) = (t \operatorname{sen} t, t \cos t, t) \; ; \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

e cuja densidade de massa é a função $\sigma(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{2+z^2}}$.

8. Considere o campo vectorial

$$F(x,y,z) = \left( \frac{y}{x^2+y^2} - x \, , \, -\frac{x}{x^2+y^2} + y \, , \, \cos(z^2) \right).$$

(1.0 val.) a) Calcule o trabalho realizado por $F$ ao longo da linha definida por $4x^2 + y^2 = 1 \; ; \; z = 0$, no sentido positivo quando vista do ponto $(0,0,10)$.

(1.0 val.) b) Calcule o trabalho realizado por $F$ ao longo da linha definida por $x^2 + z^2 = 1 \; ; \; y = 1$, no sentido positivo quando vista do ponto $(0,10,0)$.

(1.5 val.) 9. Use o teorema da divergência para calcular o fluxo do campo $F(x,y,z) = (-yz, xz, 2)$ através da superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \; ; \; z < 4\},$$

orientada com a normal com terceira componente negativa.

(1.5 val.) 10. Seja $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ um campo vectorial de classe $C^1$, fechado e tal que $\oint_C F \cdot dg = 2\pi$, sendo $C$ a circunferência de raio um e centro na origem e percorrida uma vez no sentido positivo. Mostre que existe um campo escalar $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(x,y) = \left( -\frac{y}{x^2+y^2} \, , \, \frac{x}{x^2+y^2} \right) + \nabla\phi.$$