Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 5

(Teorema de Fubini. Regra de Leibniz. Mudança de Variáveis de Integração)

1. Calcule o integral da função indicada no rectângulo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ : 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 2\}$.
   (a) $f(x,y) = x^2 y$.
   (b) $f(x,y) = y \operatorname{sen}(xy)$.
2. Invertendo a ordem de integração, calcule
   (a) $\int_0^1 \left(\int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx \right) dy$.
   (b) $\int_0^1 \left(\int_0^{\operatorname{arcsen} y} y \operatorname{sen} x\, dx \right) dy$.
3. Calcule a área da seguinte região
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 2 - x^2\}$$
   usando um integral iterado da forma $\int (\int dx) dy$. Calcule ainda (usando a ordem de integração que entender) as coordenadas do centro de massa, e os momentos de inércia em torno dos eixos Ox, Oy e da origem de uma placa com a forma descrita por D admitindo que a densidade de massa é constante igual a 1.
4. Inverta a ordem de integração dos seguintes integrais duplos
   (a) $\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y) dy \right) dx$.
   (b) $\int_1^2 \left(\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y) dy \right) dx$.
   (c) $\int_0^\pi \left(\int_{-\sin \frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y) dy \right) dx$.
   (d) $\int_{\frac{13\pi}{6}}^{\frac{17\pi}{6}} \left(\int_{\frac{3}{2\pi}|x - \frac{5\pi}{2}|}^{\operatorname{sen} x} f(x,y) dy \right) dx$.
   (e) $\int_0^{2\pi} \left(\int_{-1}^{\operatorname{sen} y} f(x,y) dx \right) dy$.
   (f) $\int_{-2}^{-1} \left(\int_0^{2+x} f(x,y) dy \right) dx + \int_{-1}^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{2-|x|} f(x,y) dy \right) dx$.
5. Calcule $\int_V f$ com
   (a) $f(x,y,z) = \frac{1}{(1+x+y+z)^3}$ e V o sólido limitado pelos planos coordenados e o plano $x+y+z = 1$.
   (b) $f(x,y,z) = xyz$ e V o sólido limitado pelos planos $x = 1$, $x = 0$, $y = 1$,$y = 0$,$z = 0$ e o parabolóide $z = x^2 + y^2$.
6. Considere a região
$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z \leq 1 \ ; \ x + y - 2z \leq 1 \ ; \ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0\}.$$
   Calcule o volume de V na forma:
   a) $\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \cdots dx \right) dy \right) dz$.
   b) $\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \cdots dz \right) dy \right) dx$.
7. Calcule o volume e as coordenadas do centróide do sólido limitado pela superfície $z = x^2 - y^2$, o plano xy e os planos $x = 1$ e $x = 3$.

8. Escreva expressões para o volume de V na ordem indicada.

   (a) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1, 0 \leq z \leq x+y\}$ nas ordens $\int \left(\int \left(\int dy \right) dz \right) dx$ e $\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz$.
   (b) V o sólido do problema 5(b) nas ordens $\int \left(\int \left(\int dx \right) dz \right) dy$ e $\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz$.
   (c) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1 \ ; \ x^2+z^2 \leq 1\}$ nas ordens $\int \left(\int \left(\int dy \right) dx \right) dz$ e $\int \left(\int \left(\int dz \right) dy \right) dx$.
   (d) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 \leq 1, x^2-y^2 \leq z \leq 1\}$ nas ordens $\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz$ e $\int \left(\int \left(\int dy \right) dz \right) dx$.
   (e) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} \leq y \leq x \ ; \ 0 \leq z \leq x \ ; \ x \leq 1\}$ nas ordens $\int \left(\int \left(\int dz \right) dy \right) dx$, $\int \left(\int \left(\int dz \right) dx \right) dy$ e $\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz$.

9. Escreva o integral $\int\int_S f(x,y)dxdy$ em coordenadas polares considerando as seguintes regiões S.

   (a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leq 2, y < |x|\}$.
   (b) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0\}$.
   (c) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$.
   (d) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$.
   (e) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$.
   (f) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$.

10. Utilizando coordenadas polares (possivelmente modificadas), calcule

   (a) $\int_{-2}^{2} \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} e^{-x^2-y^2} dy \right) dx$.
   (b) $\int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2} dy \right) dx$.
   (c) $\int_{0}^{2} \left(\int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2+y^2) dy \right) dx$.
   (d) $\int\int_S \cos((x-1)^2+(y-1)^2)dxdy$ com $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x-1)^2+(y-1)^2 \leq 2\}$.
   (e) A área da região $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} < 1 \ ; \ y > |x|\}$.

11. Considere a transformação de coordenadas definida por

$$x = u+v, \qquad y = v-u^2.$$

   (a) Sendo T o triângulo com vértices $(0,0), (2,0)$ e $(0,2)$ no plano uv, determine a imagem de T no plano xy pela transformação de coordenadas.
   (b) Sendo S o conjunto determinado na alínea anterior, calcule $\int\int_S \frac{1}{(x-y+1)^2} dxdy$.

12. Considere o conjunto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y < 1 \ ; \ 0 < y < x\},$$

e seja $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = e^{-(x+y)^4}(x^2-y^2)$. Calcule $\int_D f$ utilizando uma transformação de coordenadas apropriada. Justifique cuidadosamente.

13. Escreva expressões em coordenadas cilíndricas e esféricas para o integral $\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz$ para as seguintes regiões V.

   (a) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, 0 \leq z \leq 1\}$.
   (b) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2+y^2} < z < \sqrt{1-x^2-y^2}\}$.

(c) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < y < x, z > 0, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.

14. Considere a região

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \; ; \; z^2 \leq x^2 + y^2 \; ; \; x \geq 0, y \geq 0\},$$

com densidade de massa dada por $\alpha(x,y,z) = x^2 + y^2$.

a) Escreva expressões para a massa de U utilizando coordenadas esféricas e coordenadas cilíndricas.

b) Calcule o momento de inércia de U relativamente ao eixo Oz.

15. Considere a região

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 3y^2 \leq 1 \; ; \; x^2 + 3y^2 \leq z \leq 3 - x^2 - 3y^2\},$$

com densidade de massa dada por $\alpha(x,y,z) = z^2$.

a) Calcule a massa total de V.

b) Calcule a coordenada z do centro de massa de V.

16. Calcule o volume da região $B \subset \mathbb{R}^3$ definida pelas condições

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 4 - 2(x^2 + y^2), & \text{se} \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 3 - (x^2 + y^2), & \text{se} \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3. \end{cases}$$

17. Considere o sólido

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + z^2 \leq 4 \; ; \; 0 \leq y \leq (x^2 + z^2)^{\frac{1}{4}} \; ; \; x \geq 0, z \geq 0\},$$

com densidade de massa dada por $\alpha(x,y,z) = xyz$. Calcule a massa total de S.

18. Calcule o volume de cada uma das regiões

a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 1 - (\sqrt{x^2 + z^2} - 1)^2 \; ; \; x \geq 0 \; ; \; z \geq 0\}$

b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 < 1 \; ; \; y \geq 0\}$.

19. (a) Calcule $F'(0)$ onde F é a função definida pela expressão $F(t) = \int_1^3 e^{-tx^2} dx$.

(b) Escreva uma expressão integral para as derivadas parciais da função definida por

$$F(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^u \arctan(xu + y^2 v) \, dv \right) du.$$

(c) Escreva uma expressão para a derivada da função $G \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(x) = \int_{x^2}^{\cos x} \log\left(1 + e^{tx}\right) \, dt.$$

20. Sendo $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, ache uma expressão para a derivada da função

$$F(x) = \int_x^{x^3} f(tx, t^2 + x^3) \, dt.$$

21. Sendo $V_t = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq t\}$ e $F \colon [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ a função definida por

$$F(t) = \int\int\int_{V_t} \frac{e^{t(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dxdydz,$$

calcule $F'(t)$.