Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 3

(Derivadas de Ordem Superior. Extremos. Função Inversa. Função Implícita)

1. Calcule o gradiente e a matriz Hessiana de cada uma das funções seguintes:
   a) $f(x,y) = x\arctan(\frac{x}{y})$
   b) $f(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})$
   c) $f(x,y,z) = e^{xz}\tan(yz)$
2. Mostre que o potencial de Newton $V = -\frac{GMm}{r}$, em que $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, verifica a equação de Laplace:
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0\,; \quad (x,y,z) \neq (0,0,0)$$
3. Seja $w = f(x+y, x-y)$, em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2. Mostre que se tem
$$4\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$
em que $u = x+y$ e $v = x-y$.
4. Determine e classifique os pontos de estacionaridade de cada uma das funções seguintes:
   a) $f(x,y) = x^2+y^2+xy$
   b) $f(x,y) = x^2+y^2-y^3$
   c) $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$
   d) $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
   e) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+xy$
   f) $f(x,y) = y^2-x^4$
   g) $f(x,y) = x^2-y^3$
   h) $f(x,y) = x^2+xy+\frac{y^6}{12}$
5. Para cada um dos casos seguintes determine o conjunto dos pontos do domínio de f em que o respectivo Jacobiano é não nulo. Determine se f é injectiva no respectivo domínio. Descreva o conjunto $f(S)$. Se f for injectiva em S, determine f^{-1} explicitamente.
   a) $f(x,y) = (x+2y, x-y)\,, \quad S = \mathbb{R}^2.$
   b) $f(x,y) = \left(\log xy, \frac{1}{(x^2+y^2)}\right)\,, \quad S = \{(x,y) : 0 < y < x\}.$
   [Resolva este exercício no final da ficha.]
6. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (2xy, x^2-y^2)$.
   a) Mostre que f não é injectiva.
   b) Determine, justificadamente, o conjunto de pontos em que f tem inversa local.
   c) Determine a matriz Jacobiana, no ponto $(2,0)$, de uma das funções inversas locais f^{-1} da função f.

7. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} u &= xy + \operatorname{sen}(x+y) \\ v &= e^{-x+y-2} + \frac{x}{y}. \end{cases}$$

Mostre que existe uma vizinhança de $(u,v) = (-1,0)$ e uma vizinhança de $(x,y) = (-1,1)$ em que o sistema define (x,y) como função, de classe C^1, de (u,v) e calcule $\dfrac{\partial x}{\partial u}(-1,0)$.

8. Mostre que a equação $x\cos(xy) = 0$ define, implicitamente, y como função de x em alguma vizinhança do ponto $(1, \frac{\pi}{2})$ e calcule a derivada $\frac{df}{dx}(1)$. Confirme o resultado explicitando y como função de x.

9. Considere a equação $x^2 + xy + y^2 = 27$.

   a) Mostre que esta equação define y como função de x numa vizinhança do ponto $(3,-6)$, ou seja $y = f(x)$.

   b) Calcule as derivadas $f'(3)$ e $f''(3)$.

10. Mostre que a equação $zx^2 + z^3y^2 - xy^2 = 1$ define implicitamente z como função de x e de y, em torno do ponto $(0,1,1)$. Calcule a derivada $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,1)$.

11. O tempo t e as coordenadas (x,y) de um ponto em movimento no plano satisfazem o seguinte sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= e^{2t} + 1 \\ x \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x) &= t. \end{cases}$$

   a) Mostre que este sistema define, numa vizinhança do ponto $(t_0, x_0, y_0) = (1,1,e)$, uma função de classe C^1, dada por

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)).$$

   b) Calcule $\alpha'(1)$.

12. Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2, x - y)$$

e o conjunto

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = (2,0)\}.$$

Use o teorema da função implícita para justificar que, numa vizinhança do ponto $(1,1,0)$, o conjunto C é o gráfico de uma função $f : I \to \mathbb{R}^2$, em que I é um intervalo aberto em $\mathbb{R}$, ou seja, duas das variáveis são funções da terceira.

13. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e suponhamos que a equação $F(x,y,z) = 0$ determina cada uma das variáveis como função, de classe C^1, das restantes, ou seja,

$$x = x(y,z)\ ;\ y = y(x,z)\ ;\ z = z(x,y).$$

Mostre que se tem

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = -1$$