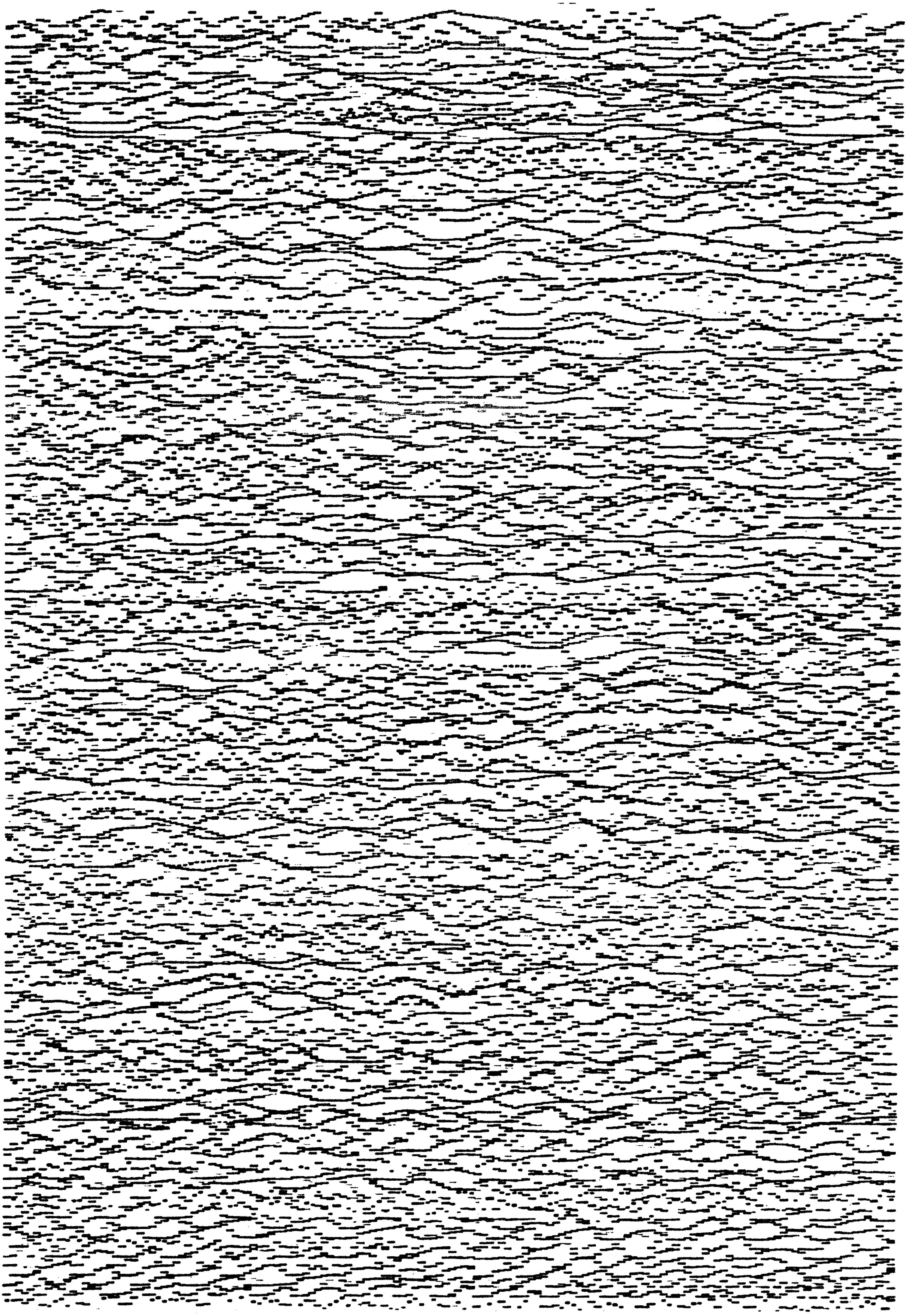
RICARDO COUTINHO

CONTORNOS INVARIANTES POR APLICAÇÕES TWIST QUE PRESERVAM A ÁREA

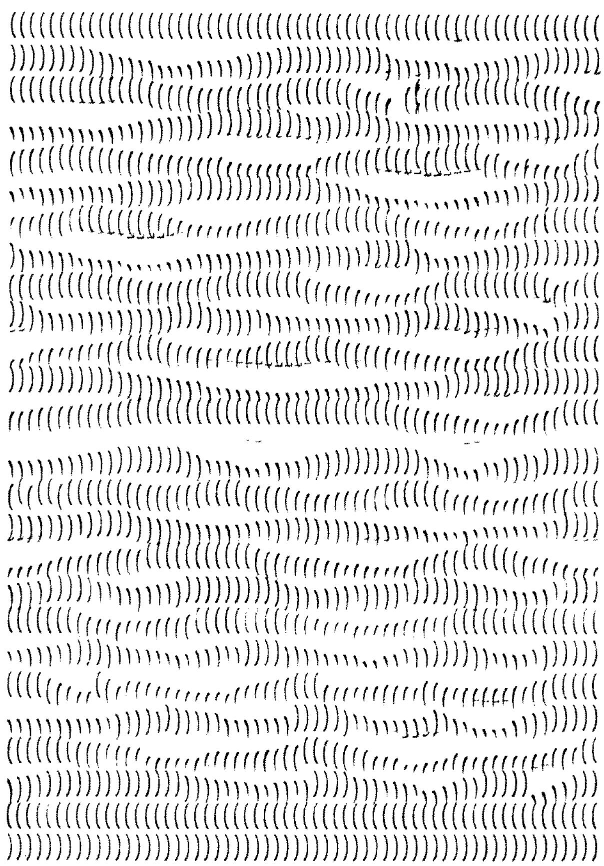
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA

SETEMBRO 1989



RICARDO COUTINHO

CANTOROS INVARIANTES POR APLICAÇÕES TWIST QUE PRESERVAM A ÁREA



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA

AGRADECIMENTOS

Na apresentação desta dissertação de mestrado, quero agradecer àqueles que, com o seu estimulo e apoio, tornaram possível a sua realização:

ao Professor R. Vilela Mendes, pela disponibilidade e entusiasmo, pela orientação e sugestão, e, principalmente pelo estimulo científico transmitido.

ao R. Lima e S. Vaienti, pelas construtivas e frutuosas discussões.

aos meus pais e amigos, em especial ao Fernando Vendrell (pelas ilustrações das capas), à Isabelle e à Graça.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

As aplicações twist que preservam a área são usadas como modelo para uma grande variedade de problemas físicos. Elas representam sistemas hamiltonianos de dois graus de liberdade e mostram-se úteis na descrição de fenómenos da física da matéria condensada e da electrodinâmica dos plasmas. Estas aplicações exibem soluções - órbitas - que dependem sensivelmente das condições iniciais e da sua não linearidade. Estas soluções podem ser periódicas, quase-periódicas ou caóticas. Quando as órbitas são quase-periódicas e ocupam superfícies unidimensionais invariantes, estas superfícies são conhecidas por toros de Kolmogorov--Arnold-Moser (KAM), que são caracterizadas por um número de rotação irracional. Estes toros estratificam o espaço das fases e limitam as órbitas caóticas existentes entre eles. Pelo teorema de KAM sabe-se que os toros de KAM subsistem a pequenas perturbações mas desaparecem quando o parâmetro de perturbação atinge certo valor crítico dependente do número de rotação. Em seu lugar surgem conjuntos de Cantor, designados por cantoros. O objectivo desta monografia é o estudo destes cantoros.

A dinâmica das aplicações twist nos cantoros é equivalente à dinâmica dos homeomorfismos em S^1. Por este motivo expõe-se no capitulo I a teoria dos homeomorfismos em S^1. No segundo capítulo demonstra-se a existência de cantoros para as aplicações twist que preservam a área e algumas das suas propriedades. Esta exposição tem como base [II-1]. No capítulo seguinte o exponente de Lyapunov dos cantoros hiperbólicos é relacionado com o decrescimento exponencial dos gap's. Por fim, estudam-se as propriedades métricas dos cantoros definindo novos conceitos, o de subdimensão e o de medida logarítmica fractal, para caracterizar conjuntos de dimensão de Hausdorff nula, e relaciona-se esta última com o exponente de Lyapunov.

I. HOMEOMORFISMOS EM S^1

I.1. Homeomorfismos em S^1 que preservam a ordem

Podemos identificar S^1 como um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ do seguinte modo:

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Defina-se agora a projecção canónica $\pi : \mathbb{R} \to S^1$

$$\pi(t) = (\cos 2\pi\, t \ ,\ \mathrm{sen}\ 2\pi\, t)$$

Com base nesta projecção vamos definir uma orientação em S^1: diremos que, $y \in S^1$ está entre x e $z \in S^1$ — simbolicamente $x \alpha y \alpha z$ - sse existirem $t_o, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\pi(t_o) = x$, $\pi(t_1) = y$, $\pi(t_2) = z$ e $t_o < t_1 < t_2 < t_o + 1$.

Note-se que $x \alpha y \alpha z \iff z \alpha x \alpha y \iff y \alpha z \alpha x$ e que as relações $x \alpha y \alpha z$ e $z \alpha y \alpha x$ são incompatíveis.

Um homeomorfismo φ de S^1 preserva a ordem sse $x \alpha y \alpha z \implies \varphi(x) \alpha \varphi(y) \alpha \varphi(z) \quad \forall\, x,y,z \in S^1$.

Note-se que, se φ é um homeomorfismo que preserva a ordem e y está entre x e z, então $\varphi^n(x) \alpha \varphi^n(y) \alpha \varphi^n(z) \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Agora e no resto da monografia utilizou-se a seguinte notação:

$$\varphi^n \equiv \varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi \qquad (\varphi \quad n \text{ vezes composto}) \ ; \ n \geq 0$$

$$\varphi^o \equiv \text{identidade}$$

$$\varphi^n \equiv \varphi^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \dots \circ \varphi^{-1} \quad (\varphi^{-1} \quad n \text{ vezes composto}) \ ; \ n \geq 0$$

onde φ^{-1} é o homeomorfismo inverso de φ.

Definiremos na seguinte proposição o que se entende por levantamento de um homeomorfismo em S^1.

I.1.1. Proposição: φ é um homeomorfismo de S^1 que preserva a ordem sse existe um levantamento $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de φ que satisfaz as seguintes propriedades:

a) $\pi \circ f = \varphi \circ \pi$

b) f é uma função contínua estritamente crescente

c) $f(t+1) = 1 + f(t)$

<u>dem.</u> Dado φ defina-se f do seguinte modo:

$f(0)$ é definido por $\varphi(1,0) = \pi(f(0))$ e $f(0) \in [0,1[$, dado $0 < t < t^1 < 1$ temos por definição $\pi(0) \; \alpha \; \pi(t) \; \alpha \; \pi(t^1)$ e como φ preserva a ordem $\varphi(\pi(0)) \; \alpha \; \varphi(\pi(t)) \; \alpha \; \varphi(\pi(t^1))$, o que significa que existem $\theta_o, \theta_t, \theta_{t^1} \in \mathbb{R}$ tais que:

$\pi(\theta_o) = \varphi(\pi(0))$, $\pi(\theta_t) = \varphi(\pi(t))$, $\pi(\theta_{t^1}) = \varphi(\pi(t))$ com $\theta_o < \theta_t < \theta_{t^1} < 1 + \theta_o$. Temos ainda a liberdade de pôr $\theta_o = f(0)$ e podemos definir $f(t) = \theta_t$, donde $f(0) < f(t) < f(t^1) < 1 + f(0)$. A

Ficamos então com $f(t)$ definida para $t \in [0,1[$, uma função estritamente crescente. Para definir f em $\mathbb{R}$ basta pôr $f(t) = \text{int}(t) + f(\hat{t})$, onde $t = \hat{t} + \text{int}(t)$, $\hat{t} \in [0,1[$ e $\text{int}(t) \in \mathbb{Z}$.

Falta apenas verificar que f é contínua:

$$\forall_{\eta>0} \; \exists_{\varepsilon>0} \; |t-t^1| < \varepsilon \Longrightarrow \| \varphi \circ \pi(t) - \varphi \circ \pi(t^1) \| < \eta$$

$$(\|\cdot\| \text{ designa a norma em } \mathbb{R}^2) \Longrightarrow \| \pi \circ f(t) - \pi \circ f(t^1) \| < \eta$$

mas $\forall_{\delta>0} \; \exists_{\eta>0} : \| \pi(\alpha) - \pi(\beta) \| < \eta \Longrightarrow \exists_{m\in\mathbb{Z}} \; |\alpha - \beta - m| < \delta$,

Por outro lado $|t-t^1| < 1 \Longrightarrow |f(t) - f(t^1)| < 1$, porque dado $0 < t^1 - t < 1$ então $t < t^1 < t+1$ e $f(t) < f(t^1) < f(t+1) = f(t) + 1$.

Portanto temos: $0 < f(t^1) - f(t) < 1$ (se $t^1 > t$) e $m - \delta < f(t^1) - f(t) < m + \delta$, logo m apenas pode ser igual a 0 ou a 1. Se supusermos por absurdo que $m = 1$, vem $1 - \delta < f(t^1) - f(t) < 1$. Seja então t_n tal que $t_n < t_{n+1} < t^1$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t^1$

e $t^1 - t_n < \eta \quad \forall_n$. Temos:

$$\lim_{n \to +\infty} f(t_n) + 1 - \delta \leq f(t^1) \leq 1 + f(t_o) < 1 + \lim_{n \to +\infty} f(t_n)$$

mas $\delta > 0$ é arbitrário, donde $\lim_{n \to +\infty} f(t_n) + 1 < 1 + \lim_{n \to +\infty} f(t_n)$, o que é absurdo. Logo $m = 0$ e portanto $\forall_{\delta>0} \exists_{1>\varepsilon>0} : |t-t^1| < \varepsilon \Longrightarrow |f(t) - f(t^1)| < \delta$.

Provemos agora a condição recíproca:

dado $x \in S^1$ então $x = \pi(t_x)$ para certo $t_x \in [0,1[$, então $\varphi(x) = \pi(f(t_x))$ está bem definido, e

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Longleftrightarrow \pi(f(t_x)) = \pi(f(t_y)) \Longleftrightarrow \exists_{m \in \mathbb{Z}} f(t_x) = f(t_y) + m \qquad \text{(B)}$$

mas $t_x, t_y \in [0,1[$, donde supondo, sem perca de generalidade, que $t_x < t_y$, temos $t_x < t_y < t_x + 1$ o que dadas as propriedades b) e c) implica $f(t_x) < f(t_y) < f(t_x) + 1$, donde $|f(t_y) - f(t_x)| < 1$ o que juntamente com (B) resulta em $\varphi(x) = \varphi(y) \Longleftrightarrow t_x = t_y \Longleftrightarrow x = y$ (C) .

Por outro lado temos $\forall_{\delta>0} \exists_{\varepsilon>0} \| x-y \| < \varepsilon \Longrightarrow \exists_{m \in \{0,1,-1\}} |t_x - t_y + m|$ então, pela continuidade de f temos $\forall_{\eta>0} \exists_{\varepsilon>0} \| x - y \| < \varepsilon \Longrightarrow |f(t_x) - f(t_y - m)| < \eta$ e pela continuidade de π e por c) temos:

$$\forall_{\delta>0} \exists_{\varepsilon>0} \| x-y \| < \varepsilon \Longrightarrow \| \pi(f(t_x)) - \pi(f(t_y - m)) \| < \delta$$
$$\Longrightarrow \| \pi(f(t_x)) - \pi(f(t_y)) \| < \delta$$
$$\Longrightarrow \| \varphi(x) - \varphi(y) \| < \delta \qquad \text{(D)}$$

(C) e (D) garantem que φ é um homeomorfismo de S^1 (note-se, como é óbvio, que φ é sobrejectiva).

Falta ainda provar que φ preserva a ordem:

$x \, \alpha \, y \, \alpha \, z \Longrightarrow \exists_{t_o, t_1, t_2} \in \mathbb{R} : \pi(t_o) = x, \pi(t_1) = y, \pi(t_2) = z$
$\wedge \; t_o < t_1 < t_2 < t_o + 1$ escolha-se $t_o \in [0,1[$, então $t_x = t_o$,

$t_y = t_1 + m_1$, $t_z = t_2 + m_2$, onde $m_1, m_2 \in \{0,-1\}$ por c): $f(t_y) = f(t_1) + m_1$, $f(t_z) = f(t_2) + m_2$ e por b): $f(t_o) < f(t_1) < f(t_2) < f(t_o) + 1$ e portanto $\pi(f(t_x))\ \alpha\ \pi(f(t_y)) = \pi(f(t_1))\ \alpha\ \pi(f(t_z)) = \pi(f(t_2))$ ou seja $\varphi(x)\ \alpha\ \varphi(y)\ \alpha\ \varphi(z)$

$\square$

I.1.2. Proposição: Dois levantamentos f e g de um homeomorfismo φ de S^1 que preserve a ordem, diferem apenas por uma constante inteira.

<u>dem.</u> $\pi \circ f = \varphi \circ \pi$, $\pi \circ g = \varphi \circ \pi$ donde $\pi \circ f = \pi \circ g$ e portanto

$\exists_{m \in \mathbb{Z}} : f = g + m$ porque f e g são contínuas.

$\square$

Note-se que se f é um levantamento de φ então $f + m$ também o é $\forall_{m \in \mathbb{Z}}$.

I.1.3. Proposição: Se f é um levantamento de φ então f^n é um levantamento de φ^n $\forall_{n \in \mathbb{Z}}$.

<u>dem.</u> para $n = 0$ é trivial;

para $n > 0$ por indução temos:

$\pi \circ f^n = \varphi^n \circ \pi \Longrightarrow \varphi \circ \pi \circ f^n = \varphi^{n+1} \circ \pi \Longrightarrow \pi \circ f^{n+1} = \varphi^{n+1} \circ \pi$

f^n é contínua estritamente crescente então f^{n+1} também o é

$f^n(t+1) = 1 + f^n(t) \Longrightarrow f^{n+1}(t+1) = f(1+f^n(t)) = 1 + f^{n+1}(t)$;

para $n < 0$ reduz-se ao caso $n > 0$ se provamos que f^{-1} é um levantamento de φ^{-1}:

$\pi \circ f = \varphi \circ \pi \Longrightarrow \pi = \varphi \circ \pi \circ f^{-1} \Longrightarrow \varphi^{-1} \circ \pi = \pi \circ f^{-1}$

se f é estritamente crescente e contínua f^{-1} também o é

$f(t+1) = f(t) + 1 \Longrightarrow t + 1 = f^{-1}(f(t) + 1) \Longrightarrow f^{-1}(t) + 1 = f^{-1}(t+1)$

$\square$

I.2. Número de rotação

Neste parágrafo definiremos número de rotação de um levantamento e mostraremos a sua existência e algumas das suas propriedades.

O seguinte teorema é devido a Poincaré (em 1885), existindo diversas demonstrações deste resultado. A que analisaremos aqui encontra-se na referência [I-1].

I.2.1. Teorema: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um levantamento de um homeomorfismo que preserve a ordem. Então,

$$\nu(x) = \lim_{n \to \pm\infty} \frac{f^n(x) - x}{n}$$

existe e é independente de $x \in \mathbb{R}$.

A este limite ν chamamos número de rotação do levantamento f.

dem. a) Fixando $k \in \mathbb{Z}$, seja $M_k = \max_{x\in\mathbb{R}} (f^k(x) - x)$; e $m_k = \min_{x\in\mathbb{R}} (f^k(x) - x)$ vamos demonstrar que $M_k - m_k < 1$.

Temos $f^k(x+1) = f^k(x) + 1$, donde $f^k - id$ é uma função periódica de período 1. Consequentemente existe x_k, $y_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$0 \leq x_k - y_k < 1 \quad , \quad f^k(x_k) - x_k = m_k \quad e \quad f^k(y_k) - y_k = M_k \ .$$

Como f^k é crescente tem-se $f^k(y_k) \leq f^k(x_k)$ donde

$$M_k + y_k = f^k(y_k) - y_k + y_k \leq f^k(x_k) = m_k + x_k$$

e portanto $M_k - m_k \leq x_k - y_k < 1$.

b) Vamos provar que $f^k(y) - y - 1 < f^k(x) - x < f^k(y) - y + 1 \quad \forall_{x,y\in\mathbb{R}}$ de facto, $f^k(y) - y - 1 \leq M_k - 1 < m_k \leq f^k(x) - x \leq M_k < 1 + m_k \leq$ $\leq f^k(y) - y + 1$

c) Pondo em b) $y = 0$ e $x = f^{k(j-1)}(0)$ obtemos:

$$f^k(0) - 1 < f^{kj}(0) - f^{k(j-1)}(0) < f^k(0) + 1 ,$$

somando em j de 1 a n, $(n > 0)$, vem

$$n(f^k(0) - 1) < \sum_{j=1}^{n} (f^{kj}(0) - f^{k(j-1)}(0)) < n(f^k(0) + 1) ,$$

dividindo por kn obtém-se

$$\frac{f^k(0)}{k} - \frac{1}{|k|} < \frac{f^{kn}(0)}{kn} < \frac{f^k(0)}{k} + \frac{1}{|k|}$$

da mesma forma somando em j de 0 a $-(n-1)$, $(n > 0)$, obtem-se

$$n(f^k(0) - 1) < - f^{-nk}(0) < n(f^k(0) + 1) ,$$

e dividindo por kn

$$\frac{f^k(0)}{k} - \frac{1}{|k|} < \frac{f^{-nk}(0)}{-nk} < \frac{f^k(0)}{k} + \frac{1}{|k|}$$

donde

$$\left|\frac{f^{kn}(0)}{kn} - \frac{f^k(0)}{k}\right| < \frac{1}{|k|} \qquad \forall_{k,n \in \mathbb{Z}}$$

Temos então

$$\left|\frac{f^n(0)}{n} - \frac{f^k(0)}{k}\right| \leq \left|\frac{f^n(0)}{n} - \frac{f^{kn}(0)}{kn}\right| + \left|\frac{f^{kn}(0)}{kn} - \frac{f^k(0)}{k}\right| ,$$

$$< \frac{1}{|n|} + \frac{1}{|k|}$$

ou seja, $\frac{f^n(0)}{n}$ é uma sucessão de Cauchy e portanto existe

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{f^n(0)}{n} = \nu(0).$$

Retomando novamente a expressão b) com $y = 0$ vem

$$f^k(0) - 1 < f^k(x) - x < f^k(0) + 1$$

o que dividindo por k, vem:

$$\frac{f^k(0)}{k} - \frac{1}{|k|} < \frac{f^k(x)-x}{k} < \frac{f^k(0)}{k} + \frac{1}{|k|}$$

mostrando que $\frac{f^n(x)-x}{n}$ converge para $\nu(0)$ independentemente de x, conforme queríamos provar. $\square$

I.2.2. Proposição: Os números de rotação de dois levantamentos de um mesmo homeomorfismo, diferem apenas pela adição de um número inteiro.

dem. Sejam f e g os levantamentos, então pela proposição I.1.2. temos $\exists_{M\in\mathbb{Z}} : f = g+M$. Então, por indução, $f^n = g^n + nM$

$$\nu_f = \lim_{n\to\pm\infty} \frac{f^n(x)-x}{n} = \lim_{n\to\pm\infty} \frac{g^n(x)+nM-x}{n} = \lim_{n\to\pm\infty} \frac{g^n(x)-x}{n} + M =$$

$$= \nu_g + M$$ $\square$

Chamaremos número de rotação de um homeomorfismo φ que preserva a ordem ao número de rotação de um levantamento de φ módulo 1, i.e., se ν_f é o número de rotação de um levantamento f de φ então o número de rotação $\nu(\varphi)$ de φ é a parte não inteira de $\nu_f : \nu(\varphi) = \hat{\nu}_f$ (onde $\nu_f = \hat{\nu}_f + \text{int}\ \nu_f$, $\hat{\nu}_f \in [0,1[$, $\text{int}\ \nu_f \in \mathbb{Z}$).

Esta definição é, pelas proposições I.1.2. e I.2.2., independente do levantamento de φ que se considere.

Dados dois homeomorfismos φ e Ψ de S^1, diz-se que φ é conjugado a Ψ sse existe um homeomorfismo H de S^1 tal que $\Psi = H \circ \varphi \circ H^{-1}$. Esta conjugação diz-se que preserva a ordem sse o homeomorfismo H preservar a ordem.

I.2.3. Teorema: Sejam φ e Ψ dois homeomorfismos de S^1 que preservam a ordem. Se φ é conjugado a Ψ preservando a ordem, então têm números de rotação iguais, i.e. $\nu(\varphi) = \nu(\Psi)$.

dem. Seja f um levantamento de φ e h um levantamento de H tal que $h(0) \in [0,1[$ (onde H é a conjugação: $\Psi = H \circ \varphi \circ H^{-1}$), e seja $g = h \circ f \circ h^{-1}$. Então g é um levantamento de Ψ:

$$\Psi \circ \pi = H \circ \varphi \circ H^{-1} \circ \pi = H \circ \varphi \circ \pi \circ h^{-1} = H \circ \pi \circ f \circ h^{-1} =$$
$$= \pi \circ h \circ f \circ h^{-1} = \pi \circ g$$

g é, como é claro, estritamente crescente e contínua

$$g(t+1) = h \circ f \circ h^{-1}(t+1) = h \circ f(h^{-1}(t)+1) = h(f \circ h^{-1}(t)+1) =$$
$$= h \circ f \circ h^{-1}(t)+1 = g(t)+1$$

Por outro lado $x \in [0,1[\implies |h(x) - x| < 2$ porque $0 \leq h(0) \leq h(x) < h(0) + 1$ e portanto $-1 < -x \leq h(x) - x < 2 - x < 2$, mas $h - id$ é periódica de período 1, donde $|h(x) - x| < 2 \quad \forall_{x \in \mathbb{R}}$, então $|h \circ f^n \circ h^{-1}(0) - f^n \circ h^{-1}(0)| < 2$ ou seja, $|g^n(0) - f^n \circ h^{-1}(0)| < 2 \quad \forall_{n \in \mathbb{Z}}$ donde

$$\nu_g = \lim_{n \to +\infty} \frac{g^n(0)}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{f^n(h^{-1}(0))}{n} = \nu_f \,.$$

Concluimos pois que $\nu(\varphi) = \nu(\Psi)$.

$\square$

Dado um homeomorfismo φ de S^1, diremos que φ tem um ponto periódico de período $N \in \mathbb{Z}^+$ sse existe $x \in S^1$ tal que $\varphi^N(x) = x$.

I.2.4. Teorema: Seja φ um homeomorfismo de S^1 que preserva a ordem. Então, φ tem número de rotação racional sse φ tem pontos periódicos.

dem. Supondo que φ tem um ponto periódico x de período N, seja $t \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(t) = x$ e f um levantamento de φ. Então $\varphi^N \circ \pi(t) = \pi \circ f^N(t) \implies \pi(t) = \pi \circ f^N(t)$, donde $\exists_{M \in \mathbb{Z}} : f^N(t) = t + M$, por indução temos $f^{nN}(t) = t + nM$ (porque $f^N(t+nM) = f^N(t) + nM$) e portanto

$$\nu_f = \lim_{n \to +\infty} \frac{f^n(t)}{M} = \lim_{n \to +\infty} \frac{f^{nN}(t)}{nN} = \lim_{n \to +\infty} \frac{t+nM}{nN} = \frac{M}{N} \in \mathbb{Q} .$$

Por outro lado se partirmos de $\nu(\varphi) = \frac{M}{N}$ ($0 < M \leq N$ primos entre si), se f fôr ainda um levantamento de φ, e se supusermos por absurdo que φ não tem pontos periódicos, então $f^N(t) \neq t + M$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$ (caso contrário se $f^N(t_o) = t_o+M$ então $\varphi^N(\pi(t_o)) = \pi(f^N(t_o)) = \pi(t_o)$, ou seja $\pi(t_o)$ era ponto periódico de φ).
Donde, por continuidade,

$$f^N(t) - t > M \qquad (\text{ou } f^N(t) - t < M) \qquad \forall_{t\in\mathbb{R}}$$

mas, $f^N - id$ é periódica de período 1, logo:

$$\exists_{a>0} \quad f^N(t) - t \geq M + a \qquad (\text{ou } f^N(t) - t \leq M - a) \qquad \forall_{t\in\mathbb{R}}$$

então, para $k > 0$ por indução $f^{kN}(t) - t \geq k(M+a)$ (ou $f^{kN}(t) - t \leq k(M-a)$) (de facto $f^{kN}(t) \geq k(M+a) + t \Longrightarrow f^{(k+1)N}(t) \geq$ $\geq f^N(k(M+a) + t) \geq M+a+k(M+a)+t)$ portanto

$$\frac{f^{kN}(t)}{kN} \geq \frac{t}{kN} + \frac{M+a}{N} \qquad \left(\text{ou } \frac{f^{kN}(t)}{kN} \leq \frac{t}{kN} + \frac{M-a}{N}\right)$$

donde $\nu_f \geq \frac{M+a}{N}$ (ou $\nu_f \leq \frac{M-a}{N}$) o que é uma contradição.

$\square$

I.2.5. Proposição: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um levantamento de um homeomorfismo de S^1; e seja ν o seu número de rotação. Então:

$$n\,\nu > m \Longrightarrow f^n(t) - t > m$$
$$n\,\nu < m \Longrightarrow f^n(t) - t < m$$

dem. (semelhante à dem. de I.2.4)

$n\,\nu > m \Longrightarrow \nu > \frac{m}{n} \Longrightarrow f^n(t) - t \neq m$ (pois caso contrário, teria-se $\nu = \frac{m}{n}$). Suponha-se por absurdo que $f^n(t_o) - t_o < m$. Pela continuidade e periocidade de $f^n - id$, existe $a > 0$ tal que $f^n(t) - t \leq m - a \ \forall_{t \in \mathbb{R}}$. Então, por indução, vem (para $k > 0$) $f^{kn}(t) \leq t + k(m-a)$, donde $\nu \leq \frac{m-a}{n}$ o que é uma contradição com $\nu > \frac{m}{n}$.

$\square$

I.3. Homeomorfismos intransitivos

Sendo um dos objectivos desta monografia o estudo de conjuntos de Cantor invariantes em S^1, e sabendo que estes aparecem somente no estudo dos homeomorfismos de número de rotação irracional, deixaremos de lado, no que se segue, a classe de homeomorfismos em S^1 que tem número de rotação racional.

Veremos em seguida que apenas alguns homeomorfismos em S^1, de número de rotação irracional — os homeomorfismos intransitivos — apresenta conjuntos de Cantor invariantes.

Vamos definir primeiro o que entendemos por conjuntos de Cantor.

Chamaremos conjunto de Cantor a qualquer conjunto C (num espaço topológico) não vazio, perfeito (fechado e sem pontos isolados) e totalmente desconexo (o que em S^1 significa que não contem abertos).

I.3.1. Teorema: Seja φ um homeomorfismo de S^1 com número de rotação irracional ($\nu(\varphi) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Dado $x \in S^1$ seja $P(x) = \{$pontos de acumulação de $\{\varphi^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}\}$. Então:

i) P é independente de x

ii) O conjunto P é φ invariante i.e. $\varphi(P) = P$

iii) P ou é S^1 ou é um conjunto de Cantor.

Para a demonstração deste teorema precisaremos do seguinte lema:

I.3.2. Lema: Seja φ nas condições do teorema. Dados $x \in S^1$ e $k, \ell \in \mathbb{Z}$ com $k \neq \ell$, seja Δ o intervalo de S^1, $\Delta = [\varphi^k(x), \varphi^\ell(x)]$. Então toda a órbita de φ passa por Δ.

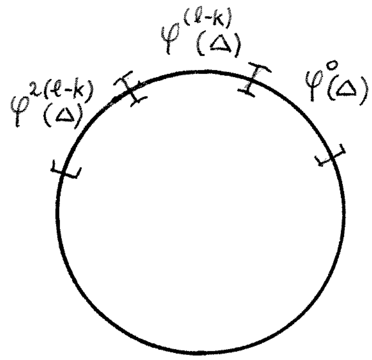
Antes de demonstramos este lema convém esclarecer o que se entende por intervalo de S^1 e por órbita de φ:

Dados $x, y \in S^1$, o intervalo $[x,y]$ designa os pontos de S^1 que estão entre x e y (seguindo a definição dada no parágrafo I.1), i.e., $[x,y] = \{z \in S^1 : x \,\alpha\, z \,\alpha\, y \ \vee\ z = x \ \vee\ z = y\}$.

Dado $x \in S^1$ o conjunto $\{\varphi^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma órbita de φ que passa por x.

<u>dem.</u> (do lema I.3.2.)

Note-se primeiro que o intervalo $\varphi^{m(\ell-k)}(\Delta)$ é contíguo a $\varphi^{(m-1)(\ell-k)}(\Delta)$, de facto, $\varphi^{m(\ell-k)}(\Delta) = [\varphi^{m\ell-mk+k}(x), \varphi^{m\ell-mk+\ell}(x)]$ e $\varphi^{(m-1)(\ell-k)}(\Delta) = [\varphi^{m\ell-mk-\ell+2k}(x), \varphi^{m\ell-mk+k}]$. Então ou existe um número finito de intervalos $\varphi^{m(\ell-k)}(\Delta)$ que cobrem S^1 ou os extremos dos intervalos $\varphi^{m(\ell-k)}(\Delta)$ convergem, quando $m \to +\infty$ para um certo ponto $y \in S^1$. Neste último caso y seria um ponto periódico de φ : $\varphi^{(\ell-k)}(y) = \varphi^{(\ell-k)}(\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi^{m(\ell-k)+k}(x)) = $
$= \lim\limits_{m\to+\infty} \varphi^{(m+1)(\ell-k)+k}(x) = y$ o que contradiz o facto de $\nu(\varphi) \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, segundo o teorema I.2.4.. Portanto existe um número finito de intervalos $\varphi^{m(\ell-k)}(\Delta)$ que cobre S^1. Donde, dado $z \in S^1$ $\exists_{m^*\in\mathbb{Z}} : z \in \varphi^{m^*(\ell-k)}(\Delta)$, ou seja $\varphi^{-m^*(\ell-k)}(z) \in$
Concluimos então que qualquer órbita de φ passa por Δ.



$\square$

<u>dem.</u> (do teorema I.3.1)

i) Seja $y \in P(x)$, então $\exists_{n(k)\to+\infty}$ tal que $\varphi^{n(k)}(x) \to y$ quando $k \to +\infty$. Suponhamos que, $\varphi^{n(k-1)}(x) \,\alpha\, \varphi^{n(k)}(x) \,\alpha\, \varphi^{n(k+1)}($
$(\varphi^{n(k)}(x)$ tende para y por valores à esquerda de $y)$.

Seja $x' \in S^1$ então, pelo lema I.3.2.

$\exists_{\ell(k) \in \mathbb{Z}} : \varphi^{\ell(k)}(x') \in [\varphi^{n(k)}(x), \varphi^{n(k+1)}(x)]$ e portanto $\varphi^{\ell(k)}(x') \to y$ com $k \to +\infty$. Logo, temos $y \in P(x')$ e $P(x)$ é independente de x.

ii) Se $y \in P$ então $\varphi(y) = \varphi(\lim\limits_{k \to +\infty} \varphi^{n(k)}(x)) = \lim\limits_{k \to +\infty} \varphi^{n(k)+1}(x) \in P$

iii) P é claramente fechado e não vazio.

P não tem pontos isolados, porque se $x \in P$ temos por i) que $\exists_{n(k)}$ tal que $x = \lim\limits_{k \to +\infty} \varphi^{n(k)}(x)$, mas por ii) $\varphi^{n(k)}(x) \in P$ $\forall_{k \in \mathbb{N}}$. Logo P é um conjunto perfeito.

Se P contém um aberto $A \neq \emptyset$, então por i) e ii) temos $\forall_{x \in S^1}$ $\exists_{\ell,k \in \mathbb{Z}} : \Delta = [\varphi^k(x), \varphi^\ell(x)] \subset A \subset P$ então pelo lema, as imagens de Δ por φ cobrem S^1. Como P é φ invariante, temos $P = S^1$.

Caso contrário P não contém abertos e portanto é um conjunto de Cantor.

$\square$

Este teorema diz-nos apenas da possibilidade de existirem conjuntos de Cantor invariantes por homeomorfismos de S^1 com número de rotação irracional. No parágrafo I.5. construiremos explicitamente um homeomorfismo com um conjunto de Cantor invariante.

Se $P = S^1$ dizemos que o homeomorfismo é transitivo, caso contrário dizemos que é intransitivo.

Indicaremos ainda dois teoremas que não são necessários para a exposição que se segue, mas que nos dão uma melhor compreensão sobre a dinâmica dos homeomorfismos de S^1 que preservam a ordem e sobre a possibilidade de existência de conjuntos de Cantor invariantes. Uma demonstração destes teoremas pode ser encontrada, por exemplo, nas referências [I-2] e [I-3].

I.3.3. Teorema: Seja φ um homeomorfismo de S^1 com número de rotação $\nu \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ e P como em I.3.1.. Então $\varphi|_P$ (φ restringido a P) é semiconjugado a uma rotação ν, sendo a semiconjugação no máximo de 2 para 1 (i.e. existe uma aplicação H contínua e sobrejectiva em S^1 tal que $H \circ \varphi = R_\nu \circ H$, onde R_ν é uma rotação — $R_\nu \circ \pi = \pi \circ r_\nu$ e $r_\nu(t) = t + \nu$ —, sendo a imagem inversa por H de um ponto de S^1 um conjunto com um máximo de dois elementos). Esta semiconjugação preserva a ordem e extende-se a uma semiconjugação em todo S^1 que colapsa os fechos dos intervalos no complementar de P.

I.3.4. Corolário: Se φ é transitivo, então é conjugado a uma rotação.

I.3.5. Teorema: Se φ é um difeomorfismo de S^1 com derivada contínua e de variação limitada, e o número de rotação de φ é irracional, então φ é transitivo.

I.4. Construção de conjuntos de Cantor em S^1

A construção que iremos fazer neste parágrafo, baseia-se no facto de os homeomorfismos intransitivos serem semiconjugados a uma rotação irracional (teorema I.3.3) e segue de perto o exposto na referência [I-3]. Vamos construir primeiro um conjunto de Cantor de medida nula em S^1 e em seguida outro de medida não nula. Por fim, construiremos um conjunto de Cantor de medida nula e com um número finito de famílias de gap's. No parágrafo I.5. construiremos, com base nestes conjuntos, homeomorfismos intransitivos.

Seja $\{\ell_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência somável de números reais positivos:

$$\ell_n > 0 \quad \forall_{n\in\mathbb{Z}} \qquad e \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \ell_n = L < +\infty$$

Para construir um conjunto de Cantor K de medida nula ponha-se $L = 1$.

Seja no resto deste capítulo: $\nu \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$.

Vamos considerar a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$h(t) = \mathrm{int}(t) + \sum_{\widehat{n\nu} \leq \hat{t}} \ell_n - \frac{\ell_0}{2}$$

Onde, aqui e no resto da monografia, $\hat{x}$ e $\mathrm{int}(x)$ são definidos por: $x = \hat{x} + \mathrm{int}\, x \quad \forall_{x \in \mathbb{R}}$, $\hat{x} \in [0,1[$ e $\mathrm{int}(x) \in \mathbb{Z}$, i.e. $\mathrm{int}(x)$ é a parte inteira de x e $\hat{x}$ é a parte não inteira de x (característica de x).

Defina-se $c_n = \pi(h(n\nu))$, $b_n = \pi(h(n\nu) - \ell_n) \quad \forall_{n \in \mathbb{Z}}$; e os intervalos de S^1 $I_n = [b_n, c_n]$. Sendo $I_n^o =]b_n, c_n[$ o interior de I_n, seja $K = S^1 \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n^o$.

Iremos provar que K é um conjunto de Contor de medida nula. Para tal, vamos analisar algumas propriedades da função h.

I.4.1. Proposição: A função h definida acima é estritamente crescente, contínua à direita e descontínua à esquerda nos pontos da forma $n\nu + m$ $(n,m \in \mathbb{Z})$, valendo ℓ_n as respectivas descontinuidades. A função h verifica ainda a seguinte igualdade: $h(t+1) = h(t)+1 \quad \forall_{t \in \mathbb{R}}$.

<u>dem.</u> h é estritamente crescente porque, dado $\delta > 0$ $h(t+\delta) - h(t) =$
$= \mathrm{int}(t+\delta) - \mathrm{int}(t) + \sum_{\widehat{n\nu} \leq \widehat{t+\delta}} \ell_n - \sum_{\widehat{n\nu} \leq \hat{t}} \ell_n$. Se $\mathrm{int}(t+\delta) - \mathrm{int}(t) = 0$ então $\hat{t} + \hat{\delta} = \widehat{t+\delta}$ e $h(t+\delta) - h(t) = \sum_{\hat{t} < \widehat{n\nu} \leq \hat{t} + \hat{\delta}} \ell_n > 0$. Se $\mathrm{int}(t+\delta) - \mathrm{int}(t) \geq 1$, então $h(t+\delta) - h(t) \geq 1 + \ell_0 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n =$
$= 1 + \ell_0 - L = \ell_0 > 0$.

h é contínua à direita porque: $\forall_{t \in \mathbb{R}} \lim_{\delta \to 0^+} \sum_{\hat{t} < \widehat{n\nu} \leq \hat{t}+\delta} \ell_n = 0$, já que $\lim_{\delta \to 0^+} \min\{|n| : n \in \mathbb{Z} \wedge \hat{t} < \widehat{n\nu} \leq \hat{t} + \delta\} = +\infty \quad \forall_{t \in \mathbb{R}}$, e porque $\mathrm{int}(t)$ é contínua à direita.

Analisando a continuidade à esquerda, repare-se que:

• se $t \notin \mathbb{Z}$ temos

$$\forall_{\hat{t}>\delta>0} \sum_{\hat{n\nu} \leq \hat{t}} \ell_n - \sum_{\hat{n\nu} \leq \widehat{(t-\delta)}} \ell_n = \sum_{\hat{t}-\delta < \hat{n\nu} \leq \hat{t}} \ell_n$$

e

$$\lim_{\delta \to 0^+} \sum_{\hat{t}-\delta < \hat{n\nu} \leq \hat{t}} \ell_n = \begin{cases} \ell_k & \text{se } \hat{t} = \hat{k\nu} \\ 0 & \text{se } \hat{t} \neq \hat{k\nu} \quad \forall_{k \in \mathbb{Z}} \end{cases}$$

• se $t \in \mathbb{Z}$ temos

$$\forall_{1>\delta>0} \sum_{\hat{n\nu} \leq \hat{t}=0} \ell_n - \sum_{\hat{n\nu} \leq \widehat{(t-\delta)}} \ell_n = \ell_o - \sum_{\hat{n\nu} \leq 1-\delta} \ell_n$$

e

$$\lim_{\delta \to 0^+} (\ell_o - \sum_{\hat{n\nu} \leq 1-\delta} \ell_n) = \ell_o - L = \ell_o - 1 .$$

Note-se ainda, que $\mathrm{int}(t)$ só é descontínua quando $t \in \mathbb{Z}$, e que neste caso $\mathrm{int}(t) - \mathrm{int}(t-\delta) = 1 \quad \forall_{1>\delta>0}$ concluimos então:

$$\forall_{t \in \mathbb{R}} \quad \lim_{\delta \to 0^+} h(t) - h(t-\delta) = \begin{cases} \ell_k & \text{se } \hat{t} = \hat{k\nu} \\ 0 & \text{se } \hat{t} \neq \hat{k\nu} \quad \forall_{k \in \mathbb{Z}} \end{cases}$$

Por último

$$\begin{aligned} h(t+1) &= \mathrm{int}(t+1) + \sum_{\hat{n\nu} \leq \widehat{(t+1)}} \ell_n - \frac{\ell_o}{2} \\ &= \mathrm{int}(t) + 1 + \sum_{\hat{n\nu} \leq \hat{t}} \ell_n - \frac{\ell_o}{2} \\ &= h(t) + 1 \end{aligned}$$

$\square$

Desta proposição torna-se evidente que o conjunto K definido acima, não é mais do que a projecção em S^1 do contradomínio de h união com os pontos b_n, i.e.:

$$K = \pi(h([0,1[) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} b_n)$$

e que os intervalos $I_n \in S^1$ não se sobrepõem.

I.4.2. Proposição: K é um conjunto de Cantor, com medida de Lebesgue em S^1 nula.

<u>dem.</u> $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n^o$ é aberto logo $K = S^1 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n^o$ é fechado.

Vamos agora ver que todos os pontos de K são pontos de acumulação. Seja $x \in K$, então ou

a) $x = \pi(h(t))$ para certo $t \in [0,1[$ ou

b) $x = b_i$ para certo $i \in \mathbb{Z}$.

No caso a), seja $n(k)$ uma sucessão de números inteiros tais que $(\widehat{n(k).\nu})$ tende para t por valores à direita de t. Então, pela proposição I.4.1., $\lim\limits_{k\to+\infty} \pi(h(\widehat{n(k).\nu})) = \pi(h(t))$ e portanto $x = \pi(h(t))$ é ponto de acumulação de K $(\pi(h(\widehat{n(k).\nu}))=c_n \in K$

No caso b), seja $n(k)$ uma sucessão de números inteiros tal que $(\widehat{n(k).\nu})$ converge para $\widehat{i.\nu}$, por valores à esquerda de $\widehat{i\nu}$. Então pela proposição I.4.1. temos que,

$$\lim_{k\to+\infty} \pi(h(\widehat{n(k).\nu})) = \pi(h(\widehat{i\nu}) - \ell_i) = b_i \quad ,$$

e portanto, como $\pi \circ h(\widehat{n(k).\nu})=c_n \in K$, b é ponto de acumulação de K.

Concluimos que K é um conjunto perfeito.

Supondo, por absurdo, que K contém um aberto A não vazio, então existe um intervalo $\Delta =]\alpha,\beta[\subset A \subset K$. Mas já vimos que a órbita $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é densa em K, portanto $\exists_{k\in\mathbb{Z}} : \pi(h(\widehat{k\nu})) = c_k \in \Delta$. Então $\exists_{\delta>0}$, tal que $\delta < \ell_k$ e $\pi(h(\widehat{k\nu}) - \delta) \in \Delta \subset A \subset K$ o que é absurdo, porque $\pi(h(\widehat{k\nu}) - \delta) \in I_k^o$ e $K \cap I_k^o = \emptyset$.

Então K é um conjunto perfeito que não contém abertos, logo K é um conjunto de Cantor.

Falta apenas verificar que K tem medida nula, o que é imediato: designando por μ a medida de Lebesgue em S^1 temos:

$$\mu(K) = \mu(S^1) - \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n^o) = 1 - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \ell_n = 1 - L = 0$$

$\square$

I.4.3. Proposição: Uma função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua à direita, estritamente crescente, e tal que:

a) $g(t+1) = g(t) + 1$

b) $\pi(g(\hat{n\nu})) = c_n$,

difere da função h por uma constante inteira.

<u>dem.</u> Dado $t \in [0,1[$, existe uma sucessão de números inteiros $n(k)$ tal que $(\widehat{n(k)\nu})$ converge para t por valores superiores a t.

Então

$$\pi(g(t)) = \lim_{k \to +\infty} \pi(g(\widehat{n(k).\nu})) = \lim_{k \to +\infty} c_{n(k)} =$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \pi(h(\widehat{n(k).\nu})) = \pi(h(t)).$$

Temos pois que, $\forall_{t\in\mathbb{R}}\ \exists_{m_t\in\mathbb{Z}} : g(t) = m_t + h(t)$. Falta-nos então ver, que m_t não depende de t. Seja $0 \le t < t' < 1$, então

$$g(t) = m_t + h(t) < g(t') = m_{t'} + h(t') < g(t+1) = g(t) + 1 =$$

$$= m_t + 1 + h(t) ,$$

donde $m_t + h(t) < m_{t'} + h(t') < 1 + m_t + h(t)$, e

$-1 = h(t'-1)-h(t') < h(t) - h(t') < m_{t'} - m_t < h(t)-h(t') + 1 < 1$,

portanto $m_{t'} = m_t$, ou seja, m_t é constante em $t \in [0,1[$.

Mas $n + m_t + h(t) = n+g(t) = g(t+n) = m_{t+n} + h(t+n) = m_{t+n} + h(t)+n$,

donde $m_t = m_{t+n}$ $\forall_{n\in\mathbb{Z}}$. Concluimos que m_t é independente de t, i.e. $\exists_{m\in\mathbb{Z}}\ \forall_{t\in\mathbb{R}} : g(t) = m + h(t)$.

$\square$

Construiremos em seguida, e de modo análogo, um conjunto de Contor K^+ de medida não nula. Para tal, considere-se agora que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \ell_n = L$, com L não necessariamente igual a 1, e a função $h_+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$h_+(t) = \operatorname{int}(t) + \frac{1}{1+L}\left(\hat{t} + \sum_{\widehat{n\nu} \leq \hat{t}} \ell_n - \frac{\ell_o}{2}\right)$$

Defina-se $c_n^+ = \pi(h_+(n\nu))$, $b_n^+ = \pi(h_+(n\nu) - \frac{\ell_n}{1+L})$ $\forall_{n\in\mathbb{Z}}$ e os intervalos de S^1 $I_n^+ = [b_n^+, c_n^+]$. Sendo $I_n^{+o} =]b_n, c_n[$ o interior de I_n^+ seja $K^+ = S^1 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n^{+o}$.

I.4.4. Proposição: A função h_+ definida acima é estritamente crescente, contínua à direita e descontínua à esquerda nos pontos da forma $n\nu + m$ $(n,m \in \mathbb{Z})$, valendo $\frac{\ell_n}{1+L}$ as respectivas descontinuidades. A função h_+ verifica ainda a seguinte igualdade: $h_+(t+1) = h_+(t)+1$ $\forall_{t\in\mathbb{R}}$.

dem. Análoga à da proposição I.4.1.

$\square$

I.4.5. Proposição: K^+ é um conjunto de Cantor, com medida de Lebesgue em S^1 igual a $\frac{1}{1+L}$.

dem. Análoga à da proposição I.4.2.

Relativamente à medida de K^+ temos:

$$\mu(K^+) = \mu(S^1) - \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n^{+o}\right) = 1 - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\ell_n}{1+L} = 1 - \frac{L}{1+L} = \frac{1}{1+L}$$

$\square$

Também existe, como é óbvio, uma proposição análoga à I.4.3 para a função h_+.

Iremos agora construir K^N um conjunto de Cantor de medida nula, e com N famílias de gap's do seguinte modo: Seja, para cada $j = 1,\dots,N$, uma sequência $\{\ell_n^{(j)}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de números reais tais que:

a) $\ell_n^{(j)} > 0 \quad \forall_{n\in\mathbb{Z}} \quad j = 1,\dots,N$

b) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \ell_n^{(j)} = L_j \quad j = 1,\dots,N$

c) $\sum_{j=1}^{N} L_j = 1$

Sejam θ_j $(j = 1,\dots,N)$, N números reais que satisfazem a $\theta_o = 0$ e $j \neq j' \Longrightarrow \theta_j - \theta_{j'} \neq n\nu + m \quad \forall_{n,m\in\mathbb{Z}}$. Então, vamos considerar a função $h_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$h_N(t) = \mathrm{int}(t) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\widehat{(n\nu+\theta_j)}\leq \hat{t}} \ell_n^{(j)} - \frac{\ell_o^{(o)}}{2}$$

Defina-se $c_n^{(j)} = \pi(h_N(n\nu+\theta_j))$, $b_n^{(j)} = \pi(h_N(n\nu+\theta_j) - \ell_n^{(j)})$, e os intervalos de S^1 $I_M^{(j)} = [b_n^{(j)}, c_n^{(j)}]$. Sendo $I_M^{(j)o}$ o interior de $I_n^{(j)}$ seja

$$K_N = S^1 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{N} \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n^{(j)o} \right)\right)$$

I.4.6. Proposição: A função h_N definida acima é estritamente crescente, contínua à direita e descontínua à esquerda nos pontos da forma $n\nu + m + \theta_j$ $(n,m \in \mathbb{Z},\ j = 1,\dots,N)$, valendo $\ell_n^{(j)}$ as respectivas descontinuidades. A função h_N verifica ainda a seguinte igualdade: $h_N(t+1) = h_N(t) + 1$.

dem. Análoga à de I.4.1.

□

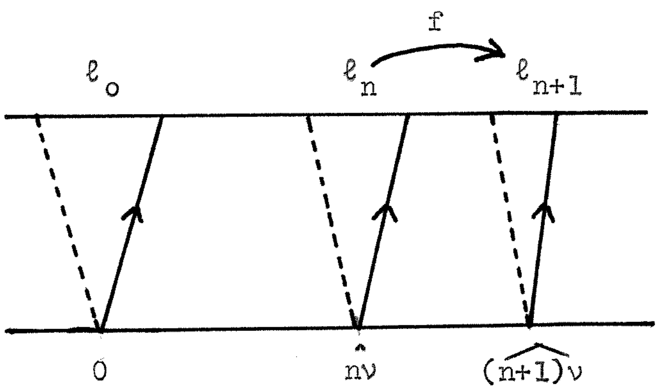
1.4.7. Proposição: K_N é um conjunto de Cantor, com medida de Lebesgue em S^1 nula.

dem. Análoga à de I.4.2.

□

I.5. Construção de homeomorfismos intransitivos

Com base nos conjuntos de Cantor K, K^+ e K_N construídos no parágrafo precedente vamos construir homeomorfismos em S^1 que têm K, K^+ e K_N, respectivamente, como conjuntos invariantes.



I.5.1. Proposição: Existe um homeomorfismo φ de S^1 que preserva a ordem, com uúmero de rotação ν, e que deixa invariante o conjunto de Cantor K (com K e ν definidos no parágrafo anterior).

dem. Define-se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do seguinte modo:

Seja $\bar{K} \subset \mathbb{R}$ o levantamento de K:

$$\bar{K} = \{t \in \mathbb{R} : \pi(t) = K\}$$

e seja
$$B = \{t \in \mathbb{R} : \exists_{n \in \mathbb{Z}} : \pi(t) = b_n\}$$

- se $t \in \bar{K} \setminus B$ então $f(t) = h(h^{-1}(t) + \nu)$
- se $t \in B$ e $\pi(t) = b_n$ então $f(t) = h(h^{-1}(t + \ell_n) + \nu) - \ell_{n+1}$
- se $t \in \mathbb{R} \setminus \bar{K}$ então $\pi(t) \in]b_n, c_n[$ para certo $n \in \mathbb{Z}$

  e portanto $\exists_{t_o, t_1 \in \mathbb{R}}$ tais que $t_o < t < t_1 < 1 + t_o$ e $\pi(t_o) = b_n$, $\pi(t_1) = c_n$

  então $f(t) = f(t_o + \theta(t_1 - t_o)) = f(t_o) + \theta(f(t_1) - f(t_o))$

  onde $\theta = \dfrac{t - t_o}{t_1 - t_o} \in]0,1[$.

Vamos provar que:

a) $f(t+1) = f(t)+1$

b) f é contínua em $\mathbb{R}$

c) f é estritamente crescente

d) $\nu_f = \nu$

e) $f(\bar{K}) = \bar{K}$

o que, pela proposição I.1.1., prova a existência do homeomorfismo φ.

a) Comecemos por provar que $h^{-1}(t+1) = h^{-1}(t)+1 \quad \forall_{t\in\bar{K}\setminus B}$

$h(t+1) = h(t)+1 \Longrightarrow t+1 = h^{-1}(h(t)+1)$, mas se $t^* \in \bar{K}\setminus B$

então $\exists_{t\in\mathbb{R}} : t^* = h(t)$, donde $h^{-1}(t^*)+1 = h^{-1}(t^*+1)$.

Se $t \in \bar{K}\setminus B$ temos

$$f(t+1) = h(h^{-1}(t+1)+\nu) = h(h^{-1}(t)+1+\nu) = f(t)+1 .$$

Se $t \in B$ com $\pi(t) = b_n$ vem $t + \ell_n \in \bar{K}\setminus B$ e $\pi(t+1) = b_n$, donde

$$f(t+1) = h(h^{-1}(t+1+\ell_n)+\nu)-\ell_{n+1} = h(h^{-1}(t+\ell_n)+1+\nu)-\ell_{n+1} = f(t)+1 .$$

Se $t \in \mathbb{R}\setminus\bar{K}$ e $t \in [t_o,t_1]$, com $t_o < t_1 < t_o+1$ e $\pi(t_o) = b_n$; $\pi(t_1) = c_n$, então $t+1 \in [t_o+1, t_1+1]$, donde

$$f(t+1) = f(t_o+1+\theta(t_1-t_o)) = f(t_o+1)+\theta(f(t_1)-f(t_o)) = 1+f(t).$$

b) A função $h^{-1}(t)$ é contínua em $\bar{K}\setminus B$ porque é a inversa de uma função crescente contínua à direita.

Considerando que $f(t) = h(h^{-1}(t) + \nu)$ se $t \in \bar{K}\setminus B$, e que h só é descontínua à esquerda nos pontos da forma $(n\nu + m)$ $(n,m\in\mathbb{Z})$. E ainda que se $h^{-1}(t_k)$ converge, quando $k \to +\infty$, para $n\nu + m$ por valores à esquerda então $\pi(t_k)$ converge para $\pi(h(n\nu+m)-\ell_n)=b$ por valores à esquerda. Podemos demonstrar a continuidade de f em $\bar{K}$ mostrando que:

i) Se $x_n \to x \in B$ com $x_n < x$ e $x_n \in \bar{K} \setminus B$ então $f(x_n) \to f(x)$

ii) Se $x_n \to x$ com $x_n \in B$ então $f(x_n) \to f(x)$

No caso i), seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\pi(x) = b_k$, então $h^{-1}(x_n) \to k\nu +$ e $h^{-1}(x_n) < k\nu + m$ para certo $m \in \mathbb{Z}$. Portanto,

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} h(h^{-1}(x_n) + \nu) = h((k+1)\nu + m) - \ell_{k+1} =$$

$$= h(h^{-1}(x + \ell_k) + \nu) - \ell_{k+1} = f(x)$$

No caso ii), se $x_n \to x$ com $x_n \in B$, então $\pi(x_n) = b_{k(n)}$. Se $k(n)$ é constante a partir de certa ordem não resta nada para demonstrar; caso contrário $k(n) \to \infty$ e $\lim_{n \to +\infty} (x_n + \ell_{k(n)}) = x$ (porque $\ell_{k(n)} \to 0$ visto que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n < +\infty$ e $\ell_n > 0$) mas $x_n + \ell_{k(n)} \in \bar{K} \setminus B$ e então

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} (h(h^{-1}(x_n + \ell_{k(n)}) + \nu) - \ell_{k(n)+1}) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} f(x_n + \ell_{k(n)}) = f(x) .$$

Portanto provámos que f é contínua em $\bar{K}$.

É evidente que f também é contínua em cada intervalo $[t_o, t_1]$, com $t_o < t_1 < 1 + t_o$ e $\pi(t_o) = b_n$, $\pi(t_1) = c_n$ para certo $n \in \mathbb{Z}$. Seja $t_n \in \mathbb{R} \setminus \bar{K}$ tal que $t_n \to t \in C\ell(\mathbb{R} \setminus \bar{K})$, onde $C\ell(\mathbb{R} \setminus \bar{K})$ é o fecho de $\mathbb{R} \setminus \bar{K}$. Então ou t_n está a partir de certa ordem dentro de um intervalo do tipo $[t_o, t_1]$ (com $\pi(t_o) = b_n$; $\pi(t_1) = c_n$) ou $t_n \to t \in \bar{K}$. Para este último caso, seja $t^o_{k(n)}$ tal que

$$\pi(t_n) \in [\pi(t^o_{k(n)}), \pi(t^o_{k(n)} + \ell_{k(n)})] = [b_{k(n)}, c_{k(n)}].$$

Tem-se $|k(n)| \to +\infty$ quando $n \to +\infty$, $f(t_n)$ e $f(t^o_{k(n)}) \in [b_{k(n)+1}, c_{k(n)+1}]$, e

$$|f(t_n)-f(t)| \leq |f(t_n)-f(t^o_{k(n)})| + |f(t^o_{k(n)})-f(t)| \leq$$
$$\leq \ell_{k(n)+1} + |f(t^o_{k(n)}) - f(t)|,$$

donde $\lim\limits_{n \to +\infty} f(t_n) = f(t)$, porque $t^o_{k(n)}$ e $t \in \bar{K}$ e $\ell_{k(n)+1} \to 0$.

Concluimos então, que f é contínua em $C\ell(\mathbb{R} \setminus \bar{K})$.

Mas se f é contínua em $\bar{K}$ e em $C\ell(\mathbb{R} \setminus \bar{K})$, é fácil de deduzir que f é contínua em $\mathbb{R}$.

c) f é, claramente, estritamente crescente em $\mathbb{R} \setminus \bar{K}$ e em $\bar{K} \setminus B$. Donde por continuidade é estritamente crescente em $\mathbb{R}$:

- Se $t < t'$, com $t \in \bar{K} \setminus B$ e $t' \in [t_o, t_1]$, então $f(t) < f(t_1) \leq f(t')$.
- Se $t < t'$, com $t \in [t_o, t_1]$ e $t' \in \bar{K} \setminus B$, então existe $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\pi(\theta_n) = c_{k(n)}$, $\theta_n \to t_1$, $\theta_n < t'$, $\theta_{n+1} < \theta_n$, e portanto $f(t) \leq f(t_1) \leq f(\theta_n) < f(t')$.
- Se $t < t'$, com $t \in [t_o, t_1]$ e $t' \in [t'_o, t'_1]$, então existe θ tal que $\pi(\theta) = c_k$ e $t_1 < \theta < t'_o$, donde $f(t) \leq f(t_1) < f(\theta) < f(t'_o) \leq f(t')$.

d) Para $t \in \bar{K} \setminus B$ tem-se $f(t) = h \circ g \circ h^{-1}$, com $g(t) = t + \nu$. Podemos então fazer uma demonstração análoga à demonstração de I.2.3. (com $t_o \in \bar{K} \setminus B$ em vez do ponto 0), para concluir que

$$\nu_f = \lim_{n \to +\infty} \frac{g^n(t_o)}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{t_o + n\nu}{n} = \nu$$

c) Que $f(\bar{K}) = \bar{K}$, é bem claro da construção de f e portanto tem-se:

$$\varphi(K) = K .$$

$\square$

Com as notações da última demonstração, é evidente que a aplicação H definida por

$$H \circ \pi(t) = \pi \circ h^{-1}(t) \quad \text{se} \quad t \in \bar{K} \setminus B$$
$$H(b_n) = \pi(n\nu)$$

semiconjuga φ com uma rotação ν (confirmando o teorema I.3.3.).

I.5.2. Proposição: Existem homeomorfismos φ_+ e φ_N de S^1 que preservam a ordem, com úmero de rotação ν, e que deixam invariantes os conjuntos de Cantor K^+ e K_N (com K^+, K_N e ν definidos no parágrafo I.4.).

dem. Análoga à demonstração de I.5.1., substituindo respectivamente h por h_+ e h_N, K por K^+ e K_N.

□

Compreende-se agora a designação "família de gap's" que utilizámos no parágrafo I.4. Concretizando, diremos que I_n é um gap de um conjunto de Cantor K se é um intervalo fechado tal que $\# (I_n \cap K) = 2$. Dado um conjunto de Cantor $K \subset S^1$ e um homeomorfismo φ tal que $\varphi(K) = K$, diremos que os gap's I_n e I'_n pertencem à mesma família sse $\exists_{k \in \mathbb{Z}} : \varphi^k(I_n) = I'_n$. Geralmente ordenam-se os gap's de uma família de modo que $\varphi(I_n) = I_{n+1}$ $\forall_{n \in \mathbb{Z}}$.

I.5.3. Proposição: Se $\lim\limits_{n \to \pm\infty} \dfrac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = 1$ e $\dfrac{\ell_{n+1}}{\ell_n} > \dfrac{1}{3}$ $\forall_{n \in \mathbb{Z}}$, então existe um difeomorfismo φ de S^1, que preserva a ordem, que tem número de rotação ν e que deixa invariante o conjunto de Cantor K (com ℓ_n, K e ν definidos no parágrafo I.4).

dem. Vamos definir f como na demonstração de I.5.1., com a seguinte alteração:

Sendo t_o e t_1 tais que $t_o < t_1 < t_o + 1$, $\pi(t_o) = b_n$ e $\pi(t_1) = c_n$ então defina-se f em $]t_o,t_1[$, pelas seguintes propriedades:

f é diferenciável em $[t_o,t_1]$, com derivada f' dada por

$$f'(t) = 1 + k_n \frac{(t_1 - t)\ (t - t_o)}{\ell_n^2} \qquad \text{(A)}$$

onde

$$k_n = \frac{6}{\ell_n} (\ell_{n+1} - \ell_n)$$

Note-se que integrando (A) a constante de integração é definida por $f(t_o)$ (que já está definido: $f(t_o) = h(h^{-1}(t_o + \ell_n) + \nu) - \ell_{n+1}$)

Precisamos, no entanto, de verificar que esta definição é auto consistente, i.e., que $f(t_1) - f(t_o) = \ell_{n+1}$ se $t_1 - t_o = \ell_n$. Mas

$$f(t_1)-f(t_o) = \int_{t_o}^{t_1} f'(t)dt = \left[t + \frac{k_n}{\ell_n^2} (\frac{t_1+t_o}{2}\, t^2 - t_1\, t_o\, t - \frac{t^3}{3}\right]_{t_o}^{t_1} =$$

$$= t_1-t_o + \frac{k_n}{\ell_n^2} (\frac{(t_1+t_o)\ (t_1^2-t_o^2)}{2} - t_1\, t_o(t_1-t_o) - \frac{t_1^3}{3} + \frac{t_o^3}{3}) =$$

$$= t_1-t_o + \frac{k_n}{6\ \ell_n^2} (t_1^3-3\ t_o\ t_1^3 + 3\ t_1\ t_o^2 - t_o^3) =$$

$$= \ell_n + \frac{k_n}{6\ \ell_n^2}\, \ell_n^3 = \ell_n + \ell_{n+1} - \ell_n = \ell_{n+1}$$

Note-se ainda que ou $f'(t) \geq 1$ ou

$$f'(t) \geq 1 + \frac{k_n}{\ell_n^2} (t_1 - \frac{t_o+t_1}{2}) (\frac{t_o+t_1}{2} - t_o) = 1 + \frac{k_n}{4} > 0$$

(dado que $\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} > \frac{1}{3}$).

A demonstração da existência do homeomorfismo φ, é análoga à de I.5.1. Falta, então ver que $f \in C^1$.

Da condição imposta aos ℓ_n, temos:

$$\lim_{n \to \pm\infty} k_n = 6 \left(\lim_{n \to \pm\infty} \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} \right) - 6 = 0$$

o que implica que $f'(t)$, definida por (A) no fecho de $\mathbb{R} \setminus \bar{K}$ pode ser prolongada por continuidade a K pela função $F'(t)$:
$F'(t) = f'(t)$ se $t \in$ fecho $(\mathbb{R} \setminus \bar{K})$, $F'(t) = 1$ se $t \in K$.

Mas

$$\int_0^1 f'(t)dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n = 1 = f(1) - f(0) ,$$

donde $\int_0^* f'(t)dt = f(*) - f(0)$, já que $f(*)$ é estritamente crescente. Primitivando $F'(t)$ com a condição $F(0) = f(0)$ obtemos

$$F(*) = F(0) + \int_0^* F'(t)dt = f(0) + \int_0^* f'(t)dt = f(*) \qquad \forall_{* \in \mathbb{R}}$$

E portanto a função $f(*)$ acima definida tem derivada contínua.

$\square$

II. EXISTÊNCIA DE CANTOROS

II.1. Aplicações twist que preservam a área em $S^1 \times \mathbb{R}$

Neste parágrafo definiremos alguns conceitos e notações que utilisaremos no resto desta monografia.

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma aplicação twist que preserva a área sse satisfaz as seguintes condições:

1) T é um difeomorfismo de classe C^1

2) $\dfrac{\partial x'}{\partial y} \geq K > 0$ (condição de twist)

3) $\dfrac{\partial x'}{\partial x} \dfrac{\partial y'}{\partial y} - \dfrac{\partial x'}{\partial y} \dfrac{\partial y'}{\partial x} = 1$ (preservação da área)

onde $T(x,y) = (x',y')$.

A condição de twist poderia ser substituída por $\dfrac{\partial x'}{\partial y} \leq K < 0$

É o que acontece com a aplicação inversa de T:

$$\frac{\partial x}{\partial y'} = \frac{-\dfrac{\partial x'}{\partial y}}{\dfrac{\partial x'}{\partial x} \dfrac{\partial y'}{\partial y} - \dfrac{\partial y'}{\partial x} \dfrac{\partial x'}{\partial y}} = -\frac{\partial x'}{\partial y} \leq -K < 0$$

Defina-se $\pi^* : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$ por $\pi^*(x,y) = (\pi(x), y)$, com π definida como em I.1., e $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $R(x,y) = (x-1,y)$.

Diremos que $T^* : S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$ é uma aplicação twist que preserva a área no cilindro sse existe um levantamento $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1) $T^* \circ \pi^* = \pi^* \circ T$

2) $T \circ R = R \circ T$

3) T é uma aplicação twist que preserva a área

i.e. $T^* : S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$ é uma aplicação twist que preserva a área sse tem um levantamento twist que preserva a área.

Note-se que dado um difeomorfismo T em $\mathbb{R}^2$ nas condições acima referidas, então o difeomorfismo T^* em $S^1 \times \mathbb{R}$ fica univocamente determinado. Mas, dada T^*, uma aplicação twist que preserva a área em $S^1 \times \mathbb{R}$, correspondem-lhe vários levantamentos T. Em particular, se T e T' são levantamentos de T, então $T = R^n \circ T'$ para certo $n \in \mathbb{Z}$.

Sejam $\pi_1 = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ as projecções $\pi_1(x,y) = x$ e $\pi_2(x,y) = y$.

Se para certo $z \in \mathbb{R}^2$ existir o limite:

$$\nu(z) = \lim_{n \to \pm\infty} \frac{\pi_1(T^n(z)) - \pi_1(z)}{n}$$

então $\nu(z)$ designa-se por número de rotação de z para aplicação de T.

Note-se que substituindo z por $T^k(z)$ o limite $\nu(z)$ mantém-se inalterado. Podemos, portanto, falar de número de rotação da órbita $\{T^k(z)\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Note-se ainda que dado $z^* \in S^1 \times \mathbb{R}$, e z tal que $\pi^*(z) = z^*$, então $\nu(z)$ mod 1 $(= \widehat{\nu(z)})$ é independente do levantamento T de T^*. Podemos, portanto, falar de número de rotação de uma órbita $\{T^{*k}(z^*)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de T^*, com o significado de $\nu(z)$ mod 1.

Uma órbita $\{T^{*k}(z^*\}_{k\in\mathbb{Z}}$ diz-se quase-periódica, se tiver número de rotação irracional e se fôr recorrente $(\exists_{k(n)} \to +\infty : \lim_{n \to +\infty} T^{*k(n)}(z^*)=z$

Diz-se que $\Gamma \subset S^1 \times \mathbb{R}$ é uma circunferência rotacional invariante por T^* se Γ é topologicamente equivalente a uma circunferência homotopicamente não trivial, i.e. Γ "dá a volta" ao cilindro, e $T^*(\Gamma) = \Gamma$.

II.2. Função geradora e estados estacionários

Vamos, com base em algumas proposições, continuar a definir conceitos e notações que serão úteis no desenvolvimento desta monografia.

II.2.1. Proposição: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação twist que preserva a área. Então existe uma função de classe C^2 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$y = - g_1'(x,x')$$

$$y' = g_2'(x,y')$$

$$- \frac{1}{K} \leq g_{12}''(x,x') < 0$$

onde $T(x,y) = (x',y')$ e K é a constante de twist de T.

<u>dem.</u> Seja $G(y,y',x,x') = T(x,y) - (x',y') = (T_1(x,y), T_2(x,y)) - (x',y')$ e note-se que

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial T_2}{\partial y} & -1 \end{bmatrix} = - \frac{\partial T_1}{\partial y} \leq - K < 0 \qquad \text{por twist}$$

então, pelo teorema da função implícita existem funções $\xi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e tais que $T(x, \xi(x,x')) - (x', \eta(x,x'))=$ tendo ainda que

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = - (\frac{\partial T_2}{\partial y} (\frac{\partial T_1}{\partial y})^{-1} \frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{\partial T_2}{\partial x}) =$$

$$= - (\frac{\partial T_1}{\partial y})^{-1} (\frac{\partial T_1}{\partial x} \frac{\partial T_2}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial x} \frac{\partial T_1}{\partial y}) = - (\frac{\partial T_1}{\partial y})^{-1} = - \frac{\partial \xi}{\partial x'}$$

Seja

$$g(x,x') = \int_0^{x'} \eta(0,t)dt - \int_0^{x} \xi(t,x')dt \ .$$

$$g_1'(x,x') \equiv \frac{\partial g}{\partial x} (x,x') = - \xi(x,x')$$

$$g_2'(x,x') \equiv \frac{\partial g}{\partial x'} (x,x') = \eta(0,x') - \int_0^{x} \frac{\partial \xi}{\partial x'} (t,x')dt =$$

$$= \eta(0,x') + \int_0^{x} \frac{\partial \eta}{\partial x} (t,x')dt = \eta(x,x')$$

$$g_{12}'' = - \frac{\partial \xi}{\partial x'} = - (\frac{\partial T_1}{\partial y})^{-1} \geq - \frac{1}{k} \quad \text{dado que} \quad \frac{\partial T_1}{\partial y} \geq K > 0$$

□

À função g definida acima, dá-se o nome de função geradora de T.

II.2.2. Proposição: Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e com $-\frac{1}{K} \leq g''_{12} < 0$ para certa constante $K > 0$. Então g gera uma aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ twist que preserva a área.

<u>dem.</u> $y + g'_1(x,x') = 0$ define implicitamente x' em função de x e y, já que $g''_{12} < 0$. Seja então $\alpha(x,y)$ tal que $y + g'_1(x,\alpha(x,y)) = 0$ com $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{g''_{11}}{g''_{12}}$ e $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{-1}{g''_{12}}$. Defina-se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T(x,y) = (\alpha(x,y), g'_2(x,\alpha(x,y))) = (x',y')$. Então a matriz jacobiana de T é dada por

$$DT(x,y) = \begin{bmatrix} -g''_{11}/g''_{12} & -1/g''_{12} \\ g''_{12} - (g''_{22}\, g''_{11}/g''_{12}) & -g''_{22}/g''_{12} \end{bmatrix}$$

donde

$$\frac{\partial x'}{\partial y} = -1/g''_{12} \geq K \quad \text{e} \quad \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y} - \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x} =$$

$$= \frac{g''_{11}\, g''_{22}}{(g''_{12})^2} - \left(-1 + \frac{g''_{11}\, g''_{22}}{(g''_{12})^2}\right) = 1$$

$\square$

Note-se que se g e $\bar{g}$ são funções geradoras de T, então $g = \bar{g} + c$, para certa constante c real. Reciprocamente se g é função geradora de T, $\bar{g} = g + a$ também o é $\forall_{a \in \mathbb{R}}$.

Diremos que $\underline{x}$ é um estado se fôr uma sequência bi-infinita $\underline{x} = \{x_i \in \mathbb{R} : i \in \mathbb{Z}\}$ e $\underline{x}_{mn}$ é um segmento se fôr uma subsequência finita $\underline{x}_{mn} = \{x_i \in \mathbb{R} : m \leq i \leq n\}$.

Vamos definir acção de um segmento $\underline{x}_{mn}$ por

$$W_{mn}(\underline{x}_{mn}) = \sum_{i=m}^{n-1} g(x_i, x_{i+1})$$

onde g é uma função geradora para uma dada aplicação T twist que preserva a área.

Um segmento $\underline{x}_{mn}$ diz-se estacionário em relação a determinada aplicação T, se a acção W_{mn} fôr estacionária para variações com os extremos x_m e x_n fixos, i.e. $\frac{\partial W_{mn}}{\partial x_i}(\underline{x}_{mn}) = 0 \quad \forall_{m<i<n}$.

Um estado $\underline{x}$ diz estacionário se todas as suas sub-sequências finitas forem segmentos estacionários.

II.2.3. Proposição: Seja T uma aplicação twist que preserva a área e g uma função geradora de T. Então se $\{(x_i,y_i) : m \leq i \leq n\}$ é segmento de uma órbita de T (i.e. $T(x_i,y_i) = (x_{i+1}, y_{i+1})$, $m \leq i < n$), temos que o correspondente segmento $\underline{x}_{mn} = \{x_i : m \leq i \leq n\}$ tem acção estacionária.

<u>dem.</u> $g_2'(x_{i-1}, x_i) = y_i = - g_1'(x_i, x_{i+1}) \quad \forall_{m<i<n}$, donde

$$\frac{\partial W_{mn}}{\partial x_i} = g_2'(x_{i-1}, x_i) + g_1'(x_i, x_{i+1}) = 0 \quad \forall_{m<i<n}$$

□

II.2.4. Proposição: Suponha-se que $\underline{x}_{mn}$ tem acção estacionária relativamente a T, com função geradora g. Seja $y_i = -g_1'(x_i, x_{i+1})$ se $m \leq i < n$ e $y_n = g_2'(x_{n-1}, x_n)$. Então, $\{(x_i,y_i) : m \leq i \leq n\}$ é um segmento de órbita de T.

<u>dem.</u> Por II.2.2. $T(x,y) = (\alpha(x,y), g_2'(x, \alpha(x,y)))$. Por estacionaridade temos $g_2'(x_{i-1}, x_i) = -g_1'(x_i, x_{i+1}) \quad \forall_{m<i<n}$ e da definição de y_i, vem $y_i + g_1'(x_i, x_{i+1}) = 0 \quad \forall_{m \leq i < n}$ e portanto $x_{i+1} = \alpha(x_i, y_i)$. Então para $m \leq i < n$ temos:

$$T(x_i,y_i) = (\alpha(x_i,y_i), g_2'(x_i,\alpha(x_i,y_i))) = (x_{i+1},g_2'(x_i,x_{i+1}))$$

$$= \begin{cases} (x_{i+1}, -g_1'(x_{i+1}, x_{i+2})) & \\ (x_n, y_n) & i = n-1 \end{cases}$$

$$= (x_{i+1}, y_{i+1})$$

□

II.2.5. Proposição: Se $\underline{u}$ e $\underline{v}$ são estados estacionários então

1) $u_n = v_n \wedge u_{n+1} = v_{n+1} \Longrightarrow \underline{u} = \underline{v}$

2) $\underline{u} \neq \underline{v} \wedge u_n = v_n \Longrightarrow (u_{n-1} - v_{n-1})(u_{n+1} - v_{n+1}) < 0$

dem. Recordado que T e T^{-1} são twist em direcções opostas $(\frac{\partial x'}{\partial x} \geq K > 0$ e $\frac{\partial x}{\partial x'} \leq -K < 0)$. Seja $y_i = g_2'(u_{i-1}, u_i)$ e $z_i = g_2'(v_{i-1}, v_i)$ então (u_i, y_i) e (v_i, z_i) são, por II.2.4., as órbitas de T correspondentes a $\underline{u}$ e $\underline{v}$ respectivamente, o que prova 1). Portanto a condição de twist implica que

$$y_n < z_n \Longrightarrow u_{n+1} < v_{n+1} \wedge u_{n-1} > v_{n-1}$$

$$y_n > z_n \Longrightarrow u_{n+1} > v_{n+1} \wedge u_{n-1} < v_{n-1}$$

o que prova 2).

$\square$

II.2.6. Proposição: Seja T^* uma aplicação twist que preserva a área em $S^1 \times \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a sua função geradora. Então

$$\exists_{c \in \mathbb{R}} \qquad g(x+1, x'+1) - g(x, x') = c \qquad \forall_{(x,x') \in \mathbb{R}^2}$$

Esta constante $\underline{\underline{c}}$ designa-se por invariante de Calabi.

dem. Seja T um levantamento de T^* então $T \circ R^n = R^n \circ T$, com $R(x,y) = (x-1, y)$. Como $g(x,x')$ é uma função geradora de T $\bar{g}(x,x') = g(x+1, x'+1)$ também o é. De facto, de $T(x+1,y) =$ $= (1,0) + T(x,y) = (1,0) + (x',y')$ vem $y = -g_1'(x,x') = -g_1'(x+1,x'+1)$ e $y' = g_2'(x,x') = g_2'(x+1, x'+1)$. Mas duas funções geradoras de uma mesma aplicação T, diferem apenas por uma constante aditiva:

$$g_1'(x,x') = \bar{g}_1'(x,x') \Longrightarrow g(x,x') - \bar{g}(x,x') = \xi(x')$$

$$g_2'(x,x') = \bar{g}_2'(x,x') \Longrightarrow g(x,x') - \bar{g}(x,x') = \eta(x)$$

e portanto $\xi(x') = \eta(x) =$ constante.

$\square$

No resto desta monografia analarisaremos apenas a classe de aplicações twist que preservam a área com invariante de Calabi nulo. Portanto daqui em diante teremos sempre

$$g(x,x') - g(x+1,\ x'+1) = 0 \qquad \forall_{(x,x')\in\mathbb{R}^2}$$

II.3. Conjuntos monótonos

Iremos definir o conceito de conjuntos monótonos, com o objectivo de aplicar a teoria dos homeomorfismos em S^1, exposta no capítulo I às aplicações twist que preservam a área em $S^1\times\mathbb{R}$.

Seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ um levantamento de um difeomorfismo twist em $S^1\times\mathbb{R}$, $R:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ a translacção $R(x,y) = (x-1,y)$ e $\pi_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ a projecção $\pi_1(x,y) = x$.

Um subconjunto M de $\mathbb{R}^2$ diz-se monótono relativamente a T se satisfaz as seguintes propriedades:

1) $M \neq \emptyset$

2) $T(M) = M$

3) $R(M) = M$

4) $\forall_{z,z'\in M}\ \ \pi_1(z) < \pi_1(z') \Longrightarrow \pi_1(T(z)) < \pi_1(T(z'))$.

Note-se que se M é monótono então $\pi_1(z) < \pi_1(z')$ implica que $\pi_1(T^n(z)) < \pi_1(T^n(z'))$ $\forall_{n\in\mathbb{Z}}$, $\forall_{z,z'\in M}$.

Note-se ainda que π_1 restringido a M é uma aplicação injectiva. De facto se tal não acontecesse teríamos $\pi_1(z) = \pi_1(z')$ e $z\neq z'$, então por twist viria $\pi_1(T^{-1}(z)) \neq \pi_1(T^{-1}(z'))$, o que contradiz a monotonia de M. Temos pois que π_1 é invertível em conjuntos monótonos.

Um estado estacionário $\underline{u}$ diz-se monótono sse:

$$\forall_{r,s,p,q\in\mathbb{Z}} \qquad u_s + r < u_q + p \Longrightarrow u_{s+1} + r < u_{q+1} + p$$

É evidente da definição, que $\underline{u}$ é um estado estacionário monótono sse a correspondente órbita de T e todas as suas iteradas por R formam um conjunto monótono.

II.3.1. Lema: Se M é um conjunto monótono então o seu fecho $C\ell(M)$ também o é.

<u>dem.</u> A verificação das condições 1) 2) e 3) é trivial.

Seja $z, z' \in C\ell(M)$, então como M é monótono e T é contínua, vem:

$$\pi_1(z) < \pi_1(z') \Longrightarrow \pi_1(T^n(z)) \leq \pi_1(T^n(z')) \quad \forall_{n\in\mathbb{Z}} \qquad (A)$$

Mas se $\pi_1(T(z)) = \pi_1(T(z'))$, então por II.2.5 vem que $\pi_1(T^2(z)) > \pi_1(T^2(z'))$ o que contradiz (A) . Logo

$$\pi_1(z) < \pi_1(z') \Longrightarrow \pi_1(T(z)) < \pi_1(T(z'))$$

□

II.3.2. Lema: O limite de estados estacionários monótonos é ainda um estado estacionário monótono, i.e., se $\underline{u}(n)$ são estados monótonos e $\lim\limits_{n\to+\infty} u(n)_i = u_i$, então $\underline{u}$ é monótono.

<u>dem.</u> Análoga à de II.3.1

□

II.3.3. Teorema: Seja T um levantamento de uma aplicação twist em $S^1 \times \mathbb{R}$, M um conjunto monótono relativamente a T e $f: \pi_1(M) \to \pi_1(M)$ dado por $f = \pi_1 \circ T \circ \pi_1^{-1}$, onde π_1^{-1} é a aplicação inversa de π_1 em M. Então, f pode ser prolongado a um homeomorfismo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é um levantamento de um homeomorfismo φ que preserva a ordem em S^1.

<u>dem.</u> Por II.3.1. o fecho $C\ell(M)$ de M é monótono e f pode ser prolongado por continuidade a $C\ell(M)$, pelo que podemos supor que M é fechado. Então $\mathbb{R} \setminus \pi_1(M)$ é uma união de intervalos abertos dijuntos. Prolongue-se linearmente f, em cada um desses interva-

los, i.e. se $[t_o,t_1] \cap \pi_1(M) = \{t_o,t_1\}$, então

$$f(t) = f(t_o) + \frac{t-t_o}{t_1-t_o}(f(t_1) - f(t_o)) \quad \forall_{t\in[t_o,t_1]}\ .$$

Se $t \in \pi_1(M)$ então $\pi_1^{-1}(t+1) = (t+1,y) = (1,0) + \pi_1^{-1}(t)$, porque se $(t+1,y) \in M$ também $(t,y) \in M$. E portanto:

$$f(t+1) = \pi_1 \circ T \circ \pi_1^{-1}(t+1) = \pi_1 \circ T(t+1,y) = \pi_1((1,0) + T(t,y)) =$$

$$= 1 + \pi_1 \circ T \circ \pi_1^{-1}(t) = f(t) + 1\ .$$

Se $t \in [t_o,t_1]$ e $[t_o,t_1] \cap \pi_1(M) = \{t_o,t_1\}$ temos:

$$[t_o+1,\ t_1+1] \cap M = \{t_o+1,\ t_1+1\} \qquad \text{e}$$

$$f(t+1) = f(t_o+1) + \frac{t-t_o}{t_1-t_o}(f(t_1+1) - f(t_o+1)) =$$

$$= f(t_o) + 1 + \frac{t-t_o}{t_1-t_o}(f(t_1) - f(t_o)) = f(t) + 1$$

Se $t \in \pi_1(M)$ e $t' \in \pi_1(M)$ vem,

$$t < t' \Longrightarrow \pi_1 \circ T \circ \pi_1^{-1}(t) < \pi_1 \circ T \circ \pi_1^{-1}(t') \Longleftrightarrow f(t) < f(t')$$

e se $t \in \pi_1(M)$ e $t' \in]t_o,t_1[$, com $[t_o,t_1] \cap \pi_1(M) = \{t_o,t_1\}$, e $t < t'$ então $f(t) \leq f(t_o) < f(t')$.

Portanto $f(t+1) = 1+f(t)$ $\forall_{t\in\mathbb{R}}$ e f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, logo, pela proposição I.1.1., f é um levantamento de um homeomorfismo φ em S^1 que preserva a ordem.

$\square$

Este teorema permite-nos identificar a dinâmica nos conjuntos monótonos em $S^1 \times \mathbb{R}$ com a dinâmica dos homeomorfismos que preservam a ordem em S^1. São então imediatos os seguintes corolários, correspondentes ao teorema I.2.1. e à proposição I.2.5., respectivamente.

I.3.4. Corolário: Se M é monótono então toda a órbita em M tem número de rotação constante:

$$\exists_{\nu\in\mathbb{R}} : \nu = \lim_{n\to\pm\infty} \frac{\pi_1(T^n(x)) - \pi_1(x)}{M} \qquad \forall_{x\in M}$$

Podemos pois, falar de número de rotação de um conjunto M monótono: $\nu(M)$.

II.3.5. Corolário: Se M é monótono relativamente a T e ν é o número de rotação de M então $\forall_{x\in M}$ tem-se:

$$n\,\nu > m \Longrightarrow x_n - x_o > m$$

$$n\,\nu < m \Longrightarrow x_n - x_o < m \qquad \forall_{n,m\in\mathbb{Z}}$$

onde $x_n = \pi_1(T^n(x))$.

Já vimos que o conjunto dos estados monótonos é fechado (lema II.3.2 agora iremos mostrar, na seguinte proposição, que o número de rotação de um estado monótono é uma função contínua neste conjunto.

II.3.6. Proposição: Seja $\underline{u}(n)$ uma sucessão de estados monótonos com $\lim_{n\to+\infty} u(n)_i = u_i$. Então se $\nu(\underline{u}(n))$ fôr o número de rotação do estado $\underline{u}(n)$, temos que $\lim_{n\to+\infty} \nu(\underline{u}(n))$ existe e é igual a $\nu(\underline{u})$, o número de rotação de $\underline{u}$.

Demonstraremos primeiro o seguinte lema:

II.3.7. Lema: Sejam $\underline{u}$ e $\underline{v}$ estados monótonos, e suponha-se que para certo $L\in\mathbb{N}$ e $\delta>0$ tem-se $|u_i - v_i| \le \delta \;\; \forall_{0\le i\le L}$. Então

$$|\nu(\underline{u}) - \nu(\underline{v})| \le 2\,\frac{(1+\delta)}{L}$$

dem. por II.3.5. vem que $\mathrm{int}(i.\nu(\underline{u})) \le u_i - u_o < \mathrm{int}(i.\nu(\underline{u})) + 1$ e portanto $-1 < \mathrm{int}(i.\nu(\underline{u})) - i.\nu(\underline{u}) \le u_i - u_o - i\nu(\underline{u}) < \mathrm{int}(i\nu(\underline{u})) - i\nu(\underline{u}) + 1 \le 1$

donde $|u_i - u_o - i\nu(\underline{u})| \leq 1$ e analogamente para $\underline{v}$. Logo:

$$|u_i - v_i - (u_o - v_o) - i(\nu(\underline{u}) - \nu(\underline{v}))| \leq 2 \implies$$

$$\implies |u_i - v_i| + |u_o - v_o| + 2 \geq i\,|\nu(\underline{u}) - \nu(\underline{u})|$$

$$\implies 2(\delta + 1) \geq L|\nu(\underline{u}) - \nu(\underline{v})|$$

□

<u>dem.</u> (de II.3.6.) Dado $\varepsilon > 0$ seja $L \in \mathbb{N}$ tal que seja $L > \frac{3}{\varepsilon}$ e $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \implies |u_i - u(n)_i| < \frac{1}{2}$ $\forall_{0 \leq i \leq L}$. E por II.3.7. temos $|\nu(\underline{u}) - \nu(\underline{u}(n))| \leq 2\,(1 + \frac{1}{2})/L = \frac{3}{L} < \varepsilon$.

□

II.3.8. Proposição: Seja $\underline{u}(n)$ uma sucessão de estados monótonos tal que $\nu = \lim_{n \to +\infty} \nu(\underline{u}(n))$ existe. Então pode construir-se um estado monótono $\underline{u}$ tal que $\lim_{k \to +\infty} u(n_k)_i = u_i$ e $\nu(\underline{u}) = \nu$.

<u>dem.</u> Ponha-se $0 \leq u(n)_o < 1$. Aproveitando a demonstração de II.3.7. temos $|u(n)_o - u(n)_1| \leq 1 + \nu(\underline{u}(n))$ $\forall_{n \in \mathbb{N}}$ então $u(n)_1$ é limitado e portanto existe uma subsucessão convergente:

$$\lim_{k \to +\infty} (u(n_k)_o,\ u(n_k)_1) = (u_o,\ u_1).$$

Podemos assim gerar $\underline{u}$ através de $(u_o, u_1) : u_i = \pi_1(T^i(u_o, -g_1'(u_o, u_1)))$

e $\lim_{k \to +\infty} u(n_k)_i = \lim_{k \to +\infty} \pi_1(T^i(u(n_k)_o,\ -g_1'(u(n_k)_o,\ u(n_k)_1)) = u_i$

donde, por II.3.6. vem $\lim_{k \to +\infty} \nu(\underline{u}(n_k)) = \nu(\underline{u})$.

□

Vamos agora provar uma importante propriedade de Lipschitz para os conjuntos monótonos. Para tal necessitaremos do seguinte lema:

II.3.9. Lema: Se M é um conjunto monótono e $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é a projecção $\pi_2(x,y) = y$, então $\pi_2(M)$ é um conjunto limitado.

dem. Escolha-se $(x_o,y_o) \in M$ e seja $(x_o', y_o') = T(x_o,y_o)$ e $K = |x_o - x_o'| + 1$. Seja $X = \{(x,x') \in \mathbb{R}^2 : |x - x_o| \leq 1 \wedge |x - x'| \leq K\}$; X é compacto logo $g_1'(x,x')$ é limitada em X, donde:

$$|g_1'(x,x')| < c \qquad \forall_{(x,x') \in X}$$

Se $(x,y) \in M$, ponha-se $(x',y') = T(x,y)$ e escolha-se $m \in \mathbb{Z}$ tal que $x_o \leq x - m \leq x_o + 1$. Como M é monótono temos $x_o' \leq x' - m \leq x_o' + 1$, então $|x' - m - (x-m)| \leq |x_o - x_o'| + 1 = K$. Portanto $(x-m, x'-m) \in X$ e $|y| = |g_1'(x,x')| = |g_1'(x-m, x'-m)| \leq c$.

$\square$

II.3.10. Teorema: Seja T uma aplicação twist que preserva a área e M um conjunto monótono. Então existe uma constante K_1 tal que

$$|\pi_2(z - \bar{z})| \leq K_1 |\pi_1(z - \bar{z})| \qquad \forall_{z,\bar{z} \in M}$$

dem. Queremos mostrar que se $(x,y), (\bar{x},\bar{y}) \in M$ então $|y - \bar{y}| \leq K_1 |x - \bar{x}|$.
Ponha-se $T(x,y) = (T_1(x,y), T_2(x,y))$ e $T^{-1}(x,y) = (T_1^{-1}(x,y), T_2^{-1}(x,y))$.
Por II.3.9., seja $c > 0$ tal que $M \subset \mathbb{R} \times [-c, c] \equiv A$.

Seja $B = \max\limits_{(x,y) \in A} \dfrac{\partial T_1}{\partial x}(x,y)$ $\quad D = \max\limits_{(x,y) \in A} \dfrac{\partial T_1^{-1}}{\partial x}(x,y)$

$K = \inf\limits_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \dfrac{\partial T_1}{\partial y}(x,y)$. Pela condição de twist $K > 0$.

Suponha-se, sem perca de generalidade, que $x < \bar{x}$.

No caso $y > \bar{y}$ temos:

$$\begin{aligned} 0 < K(y - \bar{y}) &\leq \int_{\bar{y}}^{y} \frac{\partial T_1}{\partial y}(\bar{x},t)\,dt \\ &\leq T_1(\bar{x},y) - T_1(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

por outro lado

$$\int_{x}^{\bar{x}} \frac{\partial T_1}{\partial x}(t,y)\,dt \leq B(\bar{x} - x)$$

$$T_1(\bar{x},y) - T_1(x,y) \leq B(\bar{x} - x)$$

mas por monotonia de M temos $T_1(x,y) \leq T_1(\bar{x}, \bar{y})$ e portanto $K(y-\bar{y}) \leq B(\bar{x}-x)$.

No caso $y < \bar{y}$ temos:

$$0 < K(\bar{y}-y) \leq -\int_y^{\bar{y}} \frac{\partial T_1^{-1}}{\partial y}(x,t)dt$$

$$\leq T_1^{-1}(x,y) - T_1^{-1}(x,\bar{y})$$

por outro lado

$$\int_x^{\bar{x}} \frac{\partial T_1^{-1}}{\partial x}(t,\bar{y})dt \leq D(\bar{x}-x)$$

$$T_1^{-1}(\bar{x}, \bar{y}) - T_1^{-1}(x, \bar{y}) \leq D(\bar{x}-x)$$

mas por monotonia de M temos $T_1^{-1}(x,y) \leq T_1^{-1}(\bar{x}, \bar{y})$ e portanto $K(\bar{y}-y) \leq D(\bar{x}-x)$.

Ponha-se agora $K_1 = \max(\frac{D}{K}, \frac{B}{K})$ para obter:

$$|y-\bar{y}| \leq K_1 |x-\bar{x}|$$

$\square$

II.4. Estados minimais

Já vimos que as órbitas de uma aplicação twist que preserva a área podem ser identificadas com estados estacionários da acção. Vamos agora estudar órbitas que correspondem a estados que minimizam a acção (em certo sentido que definiremos seguidamente). A partir destas órbitas construiremos no parágrafo II.6 conjuntos de Cantor invariantes em $S^1 \times \mathbb{R}$ - os cantoros.

Um segmento $\underline{x}_{mn} = \{x_i : m \leq i \leq n\}$ é minimal se $W_{m,n}(\underline{x}_{mn})$ é um mínimo (global) para variações com os extremos x_m e x_n fixos.

Um estado $\{x_i : i \in \mathbb{Z}\}$ é minimal se todo o segmento $\{x_i : m \leq i \leq n\}$ é minimal.

Note-se que um segmento é minimal, então qualquer subsegmento também é minimal.

Todo o segmento ou estado minimal é estacionário e, portanto, corresponde a um segmento de órbita ou a uma órbita completa respectivamente.

II.4.1. Proposição: Para todo o $b, d \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{Z}$, com $m < n-1$, existe um segmento minimal $\underline{x} = \{x_i : m \leq i \leq n\}$ com $x_m = b$ e $x_n = d$.

Para a demonstração desta proposição necessitaremos dos seguintes lemas:

II.4.2. Lema: $\forall_{(x,x')\in\mathbb{R}^2} \ \exists_{c\in\mathbb{R}} : g(x,x') \geq c + |x-x'|$.

dem. Seja $y = -g_1'(x,x')$, podemos então pôr $x' = x'(x,y) = \pi_1(T(x,y))$, donde $|x-x'| = |x-x'(x,y)| = |x+1-x'(x+1,y)|$, porque $T(x+1,y) = (1,0) + T(x,y)$. E assim se conclue que $|x-x'(x,y)|$ está definida no espaço quociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times[-1,1]$ é compacto, temos que $|x-x'|$ é limitado em $\{(x,x') : |g_1'(x,x')| \leq 1\} \equiv G$. Portanto,

$$\exists_{D>0} \quad |x-x'| \leq D \qquad \forall_{(x,x')\in G}$$

Então em $\{(x,x') : |x-x'| \geq D\}$ temos $|g_1'(x,x')| = |y| \geq 1$. Vamos mostrar:

a) $x'-x \geq D \Longrightarrow y \geq 1$

b) $x'-x \leq -D \Longrightarrow y \leq -1$

Temos $(x',y') = T(x,y)$ e seja $(x_\delta', y_\delta') = T(x,y+\delta)$ com $\delta > 0$, então pela condição de twist vem $x_\delta' > x'$ e portanto $x_\delta' - x > x'-x \geq D \Longrightarrow |y+\delta| \geq 1$. Como δ é arbitrário, concluimos que $y \geq 1$. A afirmação b) prova-se de maneira análoga com $\delta < 0$.

Por outro lado, como $g(x+1, x'+1) = g(x,x')$ e g é contínua, conclue-se que:

$$\exists_{A\in\mathbb{R}} \ : \ g(x,x') \geq A \qquad \forall_{(x,x')\in\{(x,x')\ :\ |x-x'|\leq D\}}$$

Portanto, temos:

$$x'-x \geq D \implies g(x'-D,x') - g(x,x') = \int_x^{x'-D} g_1'(s,x')ds \leq x-x'+D$$

$$\implies g(x,x') \geq A - D + |x'-x|$$

$$x'-x \leq -D \implies g(x,x') - g(x'+D,x') = \int_{x'+D}^{x} g_1'(s,x')ds \geq x-x'-D$$

$$\implies g(x,x') \geq A - D + |x'-x|$$

Portanto $\qquad g(x,x') \geq A - D + |x'-x| \qquad \forall_{(x,x')\in\mathbb{R}^2}$

□

II.4.3. Lema: $\forall_{a,b,d\in\mathbb{R}}$ o conjunto

$$A_a = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^{n-m+1} \ : \ W_{mn}(x) \leq a, x_m = b, x_n = d\}$$

é compacto.

dem. W_{mn} é uma função contínua, logo o conjunto em causa é fechado. Por II.4.2. $a \geq W_{mn}(\underline{x}) \geq (n-m)c + \sum_{i=m}^{n-1} |x_i - x_{i+1}|$, donde $a-(n-m)c \geq |x_i - x_{i+1}|$ e $|x_m - x_i| \leq (n-m)\ (a-(n-m)c)$. Logo $|x_i| \leq (n-m)\ (a-(n-m)c) + |b|$ para $n \leq i \leq m$ e portanto A_a é compacto.

□

dem. (de II.4.1.)

$W_{mn} : \mathbb{R}^{n-m-1} \to \mathbb{R}$ é contínua, A_a é compacto (por II.4.3) e não vazio se a fôr suficientemente grande, logo W_{mn} tem um mínimo em A_a e portanto em $\mathbb{R}^{n-m-1}$.

□

Vamos em seguida definir o cruzamento de segmentos e provar uma versão restrita do lema fundamental de Aubry.

Diremos que dois segmentos $\underline{u}_{mn}$ e $\underline{v}_{mn}$ cruzam-se, se $u_i - v_i$ tem um zero ou muda de sinal quando i varia entre m e n.

II.4.4. Teorema: Dado $m < n-1$, sejam $\underline{u}_{mn}$ e $\underline{v}_{mn}$ dois segmentos minimais para W_{mn} com $u_m \neq v_m$.

Então $\underline{u}_{mn}$ e $\underline{v}_{mn}$ cruzam-se no máximo uma vez.

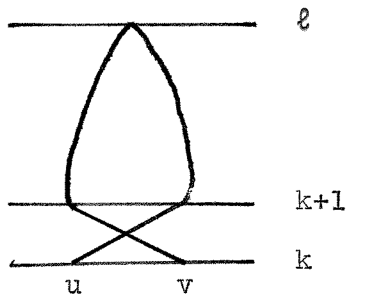
<u>dem.</u> Supondo, por absurdo, que II.4.4. é falso então existem $k, \ell \in \mathbb{Z}$ com $m \leq k < \ell \leq n$, tais que um dos seguintes três casos se verifica:

1) $u_k \neq v_k$, $u_\ell = v_\ell$

$(u_k - v_k) \cdot (u_{k+1} - v_{k+1}) < 0$

$(u_i - v_i) \cdot (u_{k+1} - v_{k+1}) > 0$

$i = k+1, \ldots, \ell-1$

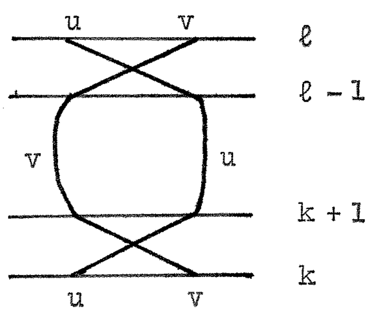


2) $(u_k - v_k) \cdot (u_{k+1} - v_{k+1}) < 0$

$(u_\ell - v_\ell) \cdot (u_{\ell-1} - v_{\ell-1}) < 0$

$(u_i - v_i) \cdot (u_{k+1} - v_{k+1}) > 0$

$i = k+1, \ldots, \ell-1$

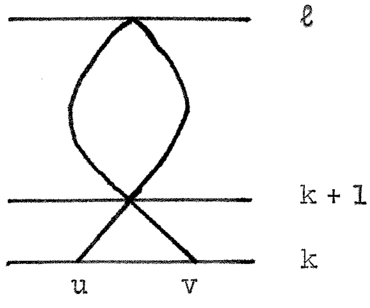


3) $u_k \neq v_k$, $u_\ell = v_\ell$

$v_{k+1} = u_{k+1}$

$(u_i - v_i)\ (u_{k+2} - v_{k+2}) > 0$

$i = k+2, \ldots, \ell-1$



Iremos ver que qualquer dos casos leva a

Note-se que $\underline{u}$ e $\underline{v}$ são ainda segmentos minimais quando restringidos a $[k,\ell] \cap \mathbb{Z}$, com u_k e u_ℓ fixos e v_k e v_ℓ fixos respectivamente.

Ponha-se $u_k < v_k$ e defina-se os segmentos $\underline{u}'$ e $\underline{v}'$ por

$$u_i' = \min(u_i,v_i) \quad ; \quad v_i' = \max(u_i,v_i) \qquad i = k,\dots,\ell$$

então

$$u_k = u_k' \ , \quad u_\ell = u_\ell' \ , \quad v_k = v_k' \ , \quad v_\ell = v_\ell'$$

e ponha-se

$$\Delta W = W_{k\ell}(\underline{u}') + W_{k\ell}(\underline{v}') - W_{k\ell}(\underline{u}) - W_{k\ell}(\underline{v})$$

. caso 1)

$$\Delta W = g(u_k,v_{k+1}) + g(v_k,u_{k+1}) - g(u_k,u_{k+1}) - g(v_k,v_{k+1})$$

$$= \int_{u_k}^{v_k} (g_1'(\xi,u_{k+1}) - g_1'(\xi,v_{k+1}))d\xi = \int_{u_k}^{v_k}\int_{v_{k+1}}^{u_{k+1}} g_{12}''(\xi,\eta)d\eta\, d\xi$$

mas $g_{12}'' < 0$ e $(v_k - u_k)\ (u_{k+1} - v_{k+1}) > 0$ donde $\Delta W < 0$ e portanto ou $W_{k\ell}(\underline{u}') < W_{k\ell}(\underline{u})$ ou $W_{k\ell}(\underline{v}') < W_{k\ell}(\underline{v})$, o que contradiz a hipótese de $\underline{u}$ e $\underline{v}$ serem minimais.

. caso 2) de modo análogo

$$\Delta W = g(u_k,v_{k+1}) + g(v_k,u_{k+1}) - g(u_k,u_{k+1}) - g(v_k,v_{k+1}) + g(u_{\ell-1},v_\ell) +$$
$$+ g(v_{\ell-1},u_\ell) - g(u_{\ell-1},u_\ell) - g(v_{\ell-1},v_\ell)$$

$$= \int_{u_k}^{v_k}\int_{v_{k+1}}^{u_{k+1}} g_{12}''(\xi,\eta)d\eta\, d\xi + \int_{u_{\ell-1}}^{v_{\ell-1}}\int_{v_\ell}^{u_\ell} g_{12}''(\xi,\eta)d\eta\, d\xi$$

$$< 0$$

. caso 3) Vem $\Delta W = 0$ ou seja $W_{k\ell}(\underline{u}') + W_{k\ell}(\underline{u}') = W_{k\ell}(\underline{v}) + W_{k\ell}(\underline{u})$

Temos por II.2.5. que $u_k = u_k'$ e $u_{k+1} = u_{k+1}'$ implica que $\underline{u}' = \underline{u}$, como tal não se verifica concluimos que $\underline{u}'$ não é estacionário e portanto não é minimal. Analogamente conclue-se que $\underline{v}'$ não é minimal o que contradiz $\Delta W = 0$.

$\square$

II.5. Estados minimais periódicos

Iremos provar neste parágrafo a existência de estados minimais periódicos de qualquer número de rotação racional. Para tal vamos definir para cada $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}_1$ os seguintes conjuntos:

$$X_{p,q} = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : x_{n+q} = x_n + p \quad \forall_{n\in\mathbb{Z}}\}$$

e a acção $W_{p/q} : X_{p,q} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$W_{p/q}(x_0,\ldots,x_{q-1}) = \sum_{i=0}^{q-1} g(x_i,x_{i+1}) \quad ; \quad (x_q = x_0+p)$$

Note-se que se $\underline{u} \in X_{p,q}$ é um estado estacionário, então $\underline{u}$ tem número de rotação igual a p/q : $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{x_{kq}}{kq} = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{x_0+kp}{kq} = \frac{p}{q}$.

II.5.1. Teorema: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um levantamento de uma aplicação twist de $S^1 \times \mathbb{R}$. Então $\forall_{p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}_1}, \exists_{\underline{u}\in X_{p,q}} : W_{p/q}(\underline{u}) \leq W_{p/q}(\underline{v}) \ \forall_{v\in X_{p,q}}$, i.e. existe sempre um mínimo de $W_{p/q}$ em $X_{p,q}$.

<u>dem.</u> (semelhante à de II.4.3)

A aplicação de $X_{p,q}$ em $\mathbb{R}^q$ definida por $\underline{x} \to (x_0,\ldots,x_{q-1})$ identifica $X_{p,q}$ com $\mathbb{R}^q$. Seja $R^* : X_{p,q} \to X_{p,q}$ definida por $(R^*(\underline{x}))_i = x_i + 1$. Então $W_{p/q} \circ R^* = W_{p/q}$, o que significa que $W_{p/q}$ é uma função em $X_{p,q}/R^*$ e portanto podemos tomar $x_0 \in [0,1]$. Vamos ver que o conjunto $A_a = \{\underline{x} \in X_{p,q}/R^* : W_{p/q}(\underline{x}) \leq a\}$ é compacto, garantindo-nos a existência do estado mínimo $\underline{u}$ referido no teorema. Por II.4.2. vem $a \geq W_{p/q}(\underline{x}) \geq q\,c + \sum_{i=0}^{q-1} |x_i - x_{i+1}| \ \forall_{\underline{x}\in A_a}$

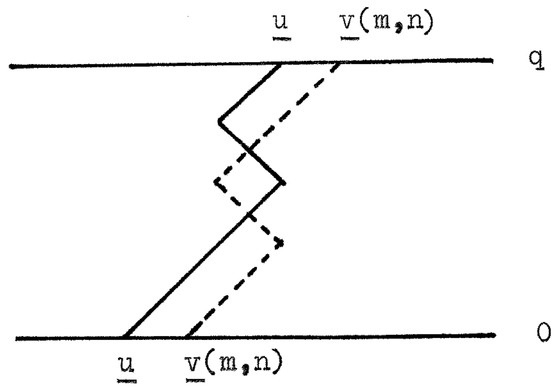
donde $q(a-qc) \geq |x_o - x_i|$ e $|x_i| \leq q(q-qc)+1$. Logo A_a é limitado. Como $W_{p/q}$ é continua A_a é fechado e portanto compacto.

$\square$

Note-se que se $\underline{x}$ minimiza $W_{p/q}$ então minimiza $W_{o,q}$ e $W_{n,n+q}$.

II.5.2. Teorema: Se $\underline{u} \in X_{p,q}$ e minimiza $W_{p/q}$ então $\underline{u}$ é um estado monótono.

<u>dem.</u> Defina-se os estados $\underline{v}(m,n) \in X_{p,q}$ por $\underline{v}(m,n)_i = u_{i+m} + n$. Então se $\underline{u}$ não fôr um estado monótono existem $m,n \in \mathbb{Z}$ tais que $\underline{v}(m,n)$ e $\underline{u}$ são estados distintos e que se cruzam em $[0,q] \cap \mathbb{Z}$. Ponha-se sem perca de generalidade $v(m,n)_o > u_o$. Então, por periocidade vem:
$v(m,n)_q > u_q$ e portanto $\underline{v}(m,n)$ e $\underline{u}$ cruzam-se pelo menos duas vezes. Mas $\underline{u}$ e $\underline{v}(m,n)$ minimizam $W_{o,q}$ o que contradiz II.4.4.



$\square$

II.5.3. Proposição: Se $\underline{u} \in X_{kp,kq}$ minimiza $W_{kp/kq}$ para certo $k > 1$ então $\underline{u} \in X_{p,q}$.

<u>dem.</u> Suponha-se, por absurdo, que $\exists_{\underline{u} \in X_{kp,kq}} : \underline{u} \notin X_{p,q}$ e $\underline{u}$ minimiza $W_{kp/kq}$. Então $u_q \neq u_o + p$, seja $u_q > u_o + p$ (o caso $u_q < u_o + p$ demonstra-se analogamente). Seja $\underline{v}$ definido por $v_i = u_{i+q} - p$. Então $\underline{u}$ e $\underline{v}$ minimizam $W_{kp/kq}$ e portanto $W_{o,kq}$. Mas $v_o = u_q - p > u_o$, então $v_{kq} > u_{kq}$ e por II.4.4 temos $v_i > u_i$ $\forall_{i \in \mathbb{Z}}$.

Donde $u_{kq} = v_{(k-1)q} + p > u_{(k-1)q} + p = v_{(k-2)q} + 2p > u_{(k-2)q} + 2p$

e por indução concluimos $u_{kq} > u_o + kp$, o que contradiz $\underline{u} \in X_{kp,kq}$.

$\square$

II.5.4. Corolário: $\underline{u}$ minimiza $W_{p/q} \iff \underline{u}$ minimiza $W_{kp/kq}$ $\forall k \geq 1$.

dem. Por II.5.1. $\exists\, \underline{u} \in X_{p,q}$, $\underline{v} \in X_{kp/kq}$ tais que $\underline{u}$ minimiza $W_{p/q}$ e $\underline{v}$ minimiza $W_{kp/kq}$. Por II.5.3. $v \in X_{p,q}$, então

$k\, W_{p/q}(\underline{v}) = W_{kp/kq}(\underline{v}) \leq W_{kp/kq}(\underline{u}) = k\, W_{p/q}(\underline{u}) \leq k\, W_{p/q}(\underline{v})$ donde

$W_{p/q}(\underline{u}) = W_{p/q}(\underline{v})$ e $W_{kp/kq}(\underline{u}) = W_{kp/kq}(\underline{v})$

$\square$

II.5.5. Corolário: $\underline{u}$ minimiza $W_{p/q} \implies \underline{u}$ é um estado minimal.

dem. u minimiza $W_{p/q} \implies$ u minimiza $W_{kp/kq}$ $\forall k \geq 1$ por II.5.4.

$\implies$ u minimiza $W_{o,kq}$

$\implies$ u minimiza $W_{n,n+kq}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

$\implies$ u é um estado minimal

$\square$

II.6. Estados minimais quase-periódicos

Neste parágrafo vamos provar o Teorema de Aubry-Mather: para todo ν irracional existe uma circunferência rotacional invariante ou um conjunto de Cantor invariante. Ao contrário do que acontecia na teoria dos homeomorfismos de S^1, a existência de conjuntos de Cantor invariantes para uma aplicação twist que preserva a área em $S^1 \times \mathbb{R}$, não corresponde a um caso patológico; existem conjuntos de cantor invariantes para aplicações analíticas.

Existem dois processos distintos de demonstrar este teorema. Um, devido a Mather [II-3], que se baseia na minimização de um funcional num conjunto de funções descontínuas utilizando a métrica de Hausdorff.

Outro, de Aubry [II-2], que analisaremos neste parágrafo. A equivalência entre as duas demonstrações encontra-se em [II-4].

II.6.1. Teorema: $\forall \nu \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ existe um estado minimal monótono com número de rotação ν.

dem. Por II.5.1., II.5.2. e II.5.5. existem estados minimais monótonos de número de rotação $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Então, sejam $\frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ tais que $\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n} = \nu \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Por II.3.8 concluimos a existência de um estado monótono de número de rotação ν. E pelo seguinte lema, este estado é também minimal.

□

II.6.2. Lema: Seja $\underline{u}(k)$ uma sucessão de estados minimais, tal que $u(k)_i \to u_i$ quando $k \to +\infty$. Então $\underline{u}$ é um estado minimal.

dem. Seja $m,n \in \mathbb{Z}$ com $m < n-1$. Queremos ver que se $\underline{v} = \{v_i : m \le i \le n\}$ é um segmento qualquer com $v_m = u_m$ e $v_n = u_n$ então $W_{mn}(\underline{v}) \ge W_{mn}(\underline{u})$. Seja $\varepsilon(k) = \max_{m\le i\le n} |u(k)_i - u_i|$ e

$$v(k)_i = \begin{cases} u(k)_i & i = m,\ i = n \\ v_i & m < i < n \end{cases}$$

Como $g \in C^1$ existe $c > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que:

$$|g(u(k)_i,\ u(k)_{i+1}) - g(u_i, u_{i+1})| < c\ \varepsilon(k) \qquad \forall_{k\ge N}\ \forall_{m\le i<n}$$

donde $$|W_{mn}(\underline{u}(k)) - W_{mn}(\underline{u})| < c\ (n-m)\ \varepsilon(k) \qquad \forall_{k\ge N}$$

e $$|W_{mn}(\underline{v}(k)) - W_{mn}(\underline{v})| < 2\ c\ \varepsilon(k) \qquad \forall_{k\le N}\ .$$

Então:

$$W_{mn}(\underline{v}) - W_{mn}(\underline{u}) = W_{mn}(\underline{v}(k)) - W_{mn}(\underline{u}(k)) + [W_{mn}(\underline{u}(k)) - W_{mn}(\underline{u})] - $$
$$- [W_{mn}(\underline{v}(k)) - W_{mn}(\underline{v})]$$

Portanto $\forall_{k \geq N}$ tem-se

$$W_{mn}(\underline{v}) - W_{mn}(\underline{u}) > W_{mn}(\underline{v}(k)) - W_{mn}(\underline{u}(k)) - c\ \varepsilon(k)\ (n-m+2)$$

Mas $W_{mn}(\underline{v}(k)) - W_{mn}(\underline{u}(k)) \geq 0 \quad \forall_{k \in \mathbb{N}}$ e $\lim\limits_{k \to +\infty} \varepsilon(k) = 0$,

logo $W_{mn}(\underline{v}) - W_{mn}(\underline{u}) \geq 0$. □

II.6.3. Teorema de Aubry-Mather: $\forall\ \nu \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, existe um conjunto monótono M_ν de estados minimais recorrentes, cuja imagem M_ν^* em $S^1 \times \mathbb{R}$ é uma circunferência rotacional invariante ou um conjunto de Cantor invariante. Tendo-se ainda que qualquer órbita em M_ν^* é densa em M_ν^*.

dem. Seja $\underline{u}$ um estado minimal monótono com número de rotação $\nu \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (ver II.6.1.). Seja $B_\nu = \{\beta = q\nu + p\ ;\ p,q \in \mathbb{Z}\}$ e defina-se

$\forall_{\beta \in B_\nu} \quad u(\beta)_n = u_{n+q} - P \quad$ se $\quad \beta = q\nu + p$.

Por II.3.5 temos: $\beta > \beta' \Longrightarrow q\nu - p > q'\nu - p' \Longrightarrow (q-q')\nu > p - p'$

$$\Longrightarrow u_{n+q} - u_{n+q'} > p - p'$$
$$\Longrightarrow u(\beta)_n > u(\beta')_n$$

Defina-se agora $h^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por:

$$h^+(\theta) = \inf_{\substack{\beta > \theta \\ \beta \in B_\nu}} u(\beta)_o \qquad\qquad h^-(\theta) = \sup_{\substack{\beta < \theta \\ \beta \in B_\nu}} u(B)_o$$

e os estados $\underline{u}^+(\alpha)$ e $\underline{u}^-(\alpha)$, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, por:

$$u^+(\alpha)_n = \inf_{\substack{\beta > \alpha \\ \beta \in B_\nu}} u(\beta)_n = h^+(n\nu + \alpha) \qquad u^-(\alpha)_n = \sup_{\substack{\beta < \alpha \\ \beta \in B_\nu}} u(\beta)_n = h^-(n\nu + \alpha$$

de facto temos por exemplo:

$$\inf_{\substack{\beta > \alpha \\ \beta \in B_\nu}} u(B)_n = \inf_{\substack{p,q \in \mathbb{Z} \\ q\nu - p > \alpha}} u_{n+q} - p = \inf_{\substack{p,q \in \mathbb{Z} \\ (q-n)\nu - p > \alpha}} u_q - p$$

$$= \inf_{\substack{p,q \in \mathbb{Z} \\ q\nu - p > n\nu + \alpha}} u(q\nu - p)_o = \inf_{\substack{\beta > n\nu + \alpha \\ \beta \in B_\nu}} u(\beta)_o = h^+(n\nu + \alpha)$$

Repare-se ainda que $\underline{u}^+(\alpha)$ e $\underline{u}^-(\alpha)$ são o limite de uma sequência de estado minimais monótonos (u_n minimal monótono $\Longrightarrow u_{n+q} - p$ minimal monótono). Temos então por II.3.2, II.3.6 e II.6.2 que $\underline{u}^+(\alpha)$ e $\underline{u}^-(\alpha)$ são minimais monótonos de número de rotação ν.

Defina-se ainda: $y^{\pm}(\alpha)_n = - g_1'(u^{\pm}(\alpha)_n, \; u^{\pm}(\alpha)_{n+1})$

$$y^{\pm}(\alpha) = y^{\pm}(\alpha)_o = - g_1'(h^{\pm}(\alpha), \; h^{\pm}(\alpha + \nu))$$

e $M_\nu^{\pm} = \{(u^{\pm}(\alpha)_n, \; y^{\pm}(\alpha)_n) : \alpha \in \mathbb{R} \;\; n \in \mathbb{Z}\} = \{(h^{\pm}(\alpha), \; y^{\pm}(\alpha)) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

Ponha-se $M_\nu = M_\nu^+ \cup M_\nu^-$ e M_ν^* a imagem em $S^1 \times \mathbb{R}$ de M_ν.

Iremos provar (na pág. 51 e seguintes) que:

i) M_ν é invariante por T e R, e
$T(h^{\pm}(\theta), \; y^{\pm}(\theta)) = (h^{\pm}(\theta + \nu), \; y^{\pm}(\theta + \nu))$

ii) M_ν é um conjunto fechado

iii) M_ν é um conjunto monótono

iv) Toda a órbita em M_ν^* é densa e recorrente em M_ν^*

v) M_ν^* é ou uma circunferência rotacional invariante ou um conjunto de Cantor invariante.

Primeiro contudo, vamos analisar as propriedades das funções $h^{\pm}$ nos seguintes lemas.

□

II.6.4. Lema: 1) $h^{\pm}(\theta)$ são estritamente crescentes

2) $h^{\pm}(\theta + 1) = h^{\pm}(\theta) + 1$

3) h^+ é contínua à direita

4) h^- é contínua à esquerda

5) $h^-(\theta) \leq h^+(\theta)$

dem. 1) Se $\theta < \theta'$ então, por densidade de B_ν em $\mathbb{R}$, existem γ e $\gamma' \in B_\nu$ tais que:

$$\theta < \gamma < \gamma' < \theta'$$

Já provamos que $u(B)_o$ é estritamente crescente em B_ν, então temos

$$h^+(\theta) = \inf_{\substack{\beta > \theta \\ \beta \in B_\nu}} u(\beta)_o \leq u(\gamma)_o < u(\gamma')_o \leq \inf_{\substack{\beta > \theta' \\ \beta \in B_\nu}} u(\beta)_o = h^+(\theta')$$

E analogamente para h^-.

2) $h^+(\theta + 1) = \inf\limits_{\substack{\beta > \theta+1 \\ \beta \in B_\nu}} u(\beta)_o = \inf\limits_{\substack{\beta > \theta \\ \beta \in B_\nu}} u(\beta+1)_o = \inf\limits_{\substack{p,q \in \mathbb{Z} \\ q\nu - p > \theta}} u_q - (p-1) = 1 + h^+(\theta)$

3) Seja $\theta_n > \theta$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} \theta_n = \theta$

$h^+(\theta) = \inf\limits_{\substack{\beta > \theta \\ \beta \in B_\nu}} u(\beta)_o = \lim\limits_{k \to +\infty} u(\beta_k)_o$, para certa sucessão estritamente decrescente $\beta_k \in B_\nu$. Então existem duas sub-sucessões β_{k_n} e β_{j_n} tais que $\beta_{k_n} \leq \theta_n \leq \beta_{j_n}$. Donde por 1) temos $u(\beta_{k_n})_o \leq h^+(\theta_n) \leq u(\beta_{j_n})_o$ portanto $h^+(\theta) \leq \lim\limits_{n \to +\infty} h^+(\theta_n) \leq h^+(\theta)$, logo $\lim\limits_{n \to +\infty} h^+(\theta_n) = h^+(\theta)$

4) dem. análoga à de 3).

5) $\beta < \theta < \beta' \Longrightarrow u(\beta)_o < u(\beta')_o$ e portanto

$$h^-(\theta) = \sup_{\substack{\beta < \theta \\ \beta \in B_\nu}} u(\beta)_o \leq \inf_{\substack{\beta > \theta \\ \beta \in B_\nu}} u(\beta)_o = h^+(\theta)$$

$\square$

II.6.5. Lema: $\theta_i \searrow \theta \Longrightarrow h^{\pm}(\theta_i) \searrow h^+(\theta) \wedge y^{\pm}(\theta_i) \to y^+(\theta)$

$\theta_i \nearrow \theta \Longrightarrow h^{\pm}(\theta_i) \nearrow h^-(\theta) \wedge y^{\pm}(\theta_i) \to y^-(\theta)$

(onde, por exemplo, $\theta_i \searrow \theta$, significa que $\theta_i > \theta \wedge \lim\limits_{i \to +\infty} \theta_i = \theta$)

dem. $\forall_{\theta,\theta'\in\mathbb{R}}$ $\theta < \theta' \Longrightarrow h^+(\theta) < h^-(\theta')$. De facto, dado $\theta < \theta'$ $\exists_{\beta,\beta'\in B_\nu}$: $\theta < \beta < \beta' < \theta'$, então $h^+(\theta) \leq u(\beta)_o < u(\beta')_o \leq h^-(\theta')$.
Supondo $\theta_i \searrow \theta$, então como h^+ é contínua à direita, temos $h^+(\theta_i) \searrow h^+(\theta)$, mas $h^+(\theta_i) \geq h^-(\theta_i) > h^+(\theta)$, donde $h^-(\theta_i) \searrow h^+(\theta)$.
Da mesma maneira $h^{\pm}(\theta_i + \nu) \searrow h^+(\theta + \nu)$ e como $y^{\pm}(\theta)$ é uma função contínua de $h^{\pm}(\theta)$ e $h^{\pm}(\theta + \nu)$ temos $y^{\pm}(\theta_i) \to y^+(\theta)$.
Se $\theta_i \nearrow \theta$, a demonstração é análoga.

$\square$

dem. (de II.6.3. - continuação)

i) Dado $\theta \in \mathbb{R}$ seja $\beta_n \in B_\nu$ tal que $h^+(\theta) = \lim_{n \to +\infty} u(\beta_n)_o =$
$= \lim_{n \to +\infty} u_{q_n} - p_n$, onde $q_n \nu - p_n = \beta_n > \theta$. Então, dada a continuidade à direita de h^+ e a continuidade de T e g_1', temos:

$$T(h^+(\theta),\ y^+(\theta)) = \lim_{n \to +\infty} T(u_{q_n} - p_n, -g_1'(u_{q_n} - p_n,\ u_{q_{n+1}} - p_n))$$

$$= \lim_{n \to +\infty} (u_{q_{n+1}} - p_n, -g_1'(u_{q_{n+1}} - p_n,\ u_{q_{n+2}} - p_n))$$

$$= \lim_{n \to +\infty} (u(\beta_n + \nu)_o, -g_1'(u(\beta_n + \nu)_o,\ u(\beta_{n+2}\ \nu)_o))$$

$$= (h^+(\theta + \nu),\ y^+(\theta + \nu))$$

Do mesmo modo conclue-se $T(h^-(\theta),\ y^-(\theta)) = (h^-(\theta + \nu),\ y^-(\theta + \nu))$.

Logo $T(M_\nu) = M_\nu$.

Temos ainda, por 2) de II.6.4., que

$$R(h^{\pm}(\theta),\ y^{\pm}(\theta)) = (h^{\pm}(\theta - 1),\ y^{\pm}(\theta)) \quad \text{e}$$

$$y^{\pm}(\theta-1) = -g_1'(h^{\pm}(\theta-1),\ h^{\pm}(\theta-1+\nu)) = -g_1'(h^{\pm}(\theta)-1,\ h^{\pm}(\theta+\nu)-$$

$$= -g_1'(h^{\pm}(\theta),\ h^{\pm}(\theta + \nu)).$$

Portanto $R(M_\nu) = M_\nu$.

ii) Seja $\underline{x}_i \in M_\nu$ com $\lim_{i \to +\infty} \underline{x}_i = \underline{x} = (x,y)$. Então $\underline{x}_i = (h^\sigma(\theta_i), y^\sigma(\theta_i))$ com $\sigma \in \{+, -\}$. Considerando subsucessões analisaremos os seguintes casos:

a) $h^\sigma(\theta_i) \searrow x$ e b) $h^\sigma(\theta_i) \nearrow x$

No primeiro caso temos, por 1) e 2) de II.6.4., que o conjunto $\{\alpha : h^+(\alpha) > x\}$, é não vazio e limitado inferiormente. Seja $\theta = \inf\{\alpha : h^+(\alpha) > x\}$, então $h^+(\theta) \geq x$ e $\theta_i \searrow \theta$. De facto, supondo que tal não era verdadeiro existiria θ' e uma subsucessão $i_n \to +\infty$ (quando $n \to +\infty$), tal que $\theta_{i_n} \to \theta'$, e $\theta_{i_n} > \theta' > \theta$ (note-se que o caso $\theta' > \theta_{i_n}$ não é possível por II.6.5.); donde $h^+(\theta') = \lim_{n \to +\infty} h^+(\theta_{i_n}) = $ $= x \geq h^-(\theta') > h^+(\theta)$ o que é contrário à definição de θ. Então, por II.6.5.

$$\lim_{i \to +\infty} (h^\sigma(\theta_i), \ y^\sigma(\theta_i)) = (h^+(\theta), \ y^+(\theta))$$

Para o caso b) o raciocínio a fazer é análogo, concluindo-se que $\lim_{i \to +\infty} (h^\sigma(\theta_i), y^\sigma(\theta_i)) = (h^-(\theta), y^-(\theta))$.

iii) Comecemos por notar que M_ν^+ e M_ν^- são conjuntos monótonos, uma vez que $h^\pm$ são estritamente crescentes. E por II.3.1., também são monótonos os seus fechos $C\ell(M_\nu^+)$ e $C\ell(M_\nu^-)$. Portanto se provarmos que $C\ell(M_\nu^+) = C\ell(M_\nu^-) = M_\nu$, provamos que M_ν é monótono: Dado $(h^+(\theta), y^+(\theta)) \in M_\nu^+$ então existe $\theta_i \searrow \theta$ tal que: $(h^-(\theta_i), y^-(\theta_i)) \to (h^+(\theta), y^+(\theta))$, e portanto $M_\nu^+ \subset C\ell(M_\nu^-)$, o que implica $M_\nu \subset C\ell(M_\nu^-)$. Por ii) temos $C\ell(M_\nu^-) \subset C\ell(M_\nu) = M_\nu$, donde $M_\nu = C\ell(M_\nu^-)$. Do mesmo modo se mostra que $M_\nu = C\ell(M_\nu^+)$.

iv) Seja $\underline{x} \in M_\nu^+$, $\underline{x} = (h^+(\alpha), y^+(\alpha))$, então dado $\underline{y} \in M_\nu$ temos $\underline{y} = (h^\sigma(\theta), y^\sigma(\theta))$ para certo $\theta \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \{+, -\}$. Esco-

lha-se $m_j, n_j \in \mathbb{Z}$ tal que $(\theta + n_j.\nu - m_j) \searrow \alpha$ quando $j \to +\infty$.
Então por II.6.5 temos $(h^{\sigma}(\theta + n_j.\nu) - m_j) \searrow h^+(\alpha)$ e $y^{\sigma}(\theta + n_j.\nu - m_j) \to y^+(\alpha)$, i.e. $\lim_{j \to +\infty} T^{n_j} R^{m_j}(\underline{y}) = \underline{x}$.
Com um argumento análogo, mostra-se que dado $\underline{x}' \in M_{\nu}^-$, existe $m_j', n_j' \in \mathbb{Z}$ tais que $\lim_{j \to +\infty} T^{n_j} R^{m_j}(\underline{y}) = \underline{x}'$, e portanto qualquer órbita em M_{ν}^* é densa em M_{ν}^*.
Para mostrar a recorrência, basta pôr $\underline{y} = \underline{x}$ no raciocínio anterior.
Como corolário temos que M_{ν}^* não tem pontos isolados.

v) Por II.3.3 existe um homeomorfismo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é um levantamento de um homeomorfismo $\varphi : S^1 \to S^1$ que preserva a ordem e tal que $f = \pi_1 \circ T \circ \pi_1^{-1}$ (onde π_1^{-1} é o inverso de π_1 em M_{ν}). Então o número de rotação de f é ν (já que qualquer órbita de M_{ν} tem número de rotação ν) e podemos aplicar o teorema I.3.1. para concluirmos que M_{ν}^* ou é uma circunferência rotacional invariante ou é um conjunto de Cantor.

$\square$

Quando o conjunto M_{ν}^*, definido acima é um conjunto de Cantor designamo-lo por cantoro.

II.6.6. Proposição: Se h^+ é contínua então M_{ν}^* é uma circunferência rotacional invariante conjugada a uma rotação ν por $h^+ = h^-$.

dem. Se h^+ é contínua então o seu contradomínio é $\mathbb{R}$, portanto $\pi_1(M_{\nu}) = \mathbb{R}$. E por II.6.3. i) temos:

$$T \circ \pi_1^{-1} \circ h^{\pm} = \pi_x^{-1} \circ h^{\pm} \circ r_{\nu} \quad \text{ou seja} \quad f \circ h^{\pm} = h^{\pm} \circ r_{\nu} ,$$

onde $r_{\nu} = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definido por $r_{\nu}(+) = t + \nu$ e $f = \pi_1 \circ T \circ \pi_1^{-1}$.

Para ver que $h^+ = h^-$, seja $\theta \in \mathbb{R}$ e θ_i tal que $\lim_{i \to +\infty} \theta_i = \theta$ e $\theta_i < \theta$. Então

$$\begin{aligned} \lim_{i \to +\infty} h^+(\theta_i) &= h^-(\theta) \quad \text{por II.6.5} \\ &= h^+(\theta) \quad \text{por continuidade} \end{aligned}$$

□

II.6.7. Proposição: Se h^+ não é contínua então M_ν é semiconjugado a uma rotação ν.

dem. Como $h^{\pm}$ são estritamente crescentes então são contínuas, exceptuando um possível conjunto numerável de saltos.

Se $h^+(\theta) = h^-(\theta)$, seja θ_i tal que $\lim_{i \to +\infty} \theta_i = \theta$ e $\theta_i < \theta$, então $\lim_{i \to +\infty} h^+(\theta_i) = h^-(\theta) = h^+(\theta)$, por II.6.5. Conclue-se que h^+ é contínua à esquerda em θ, e portanto:

$$h^-(\theta) = h^+(\theta) \iff h^{\pm} \text{ contínua em } \theta .$$

Logo $h^-(\theta) \neq h^+(\theta)$ nos pontos de descontinuidade de $h^{\pm}$.

Seja então

$$h^{-1}(x) = \inf\{\theta : h^+(\theta) > x\} = \sup\{\theta : h^-(\theta) < x\} .$$

Pelo que foi dito $h^{-1}(x)$ é contínua mas não é injectiva e com as notações das últimas demonstrações temos:

Dado $t \in \pi_1(M_\nu)$, vem $t = h^+(\theta)$ ou $t = h^-(\theta)$ e

$$r_\nu \circ h^{-1}(t) = \theta + \nu = h^{-1} \circ h^{\pm}(\theta + \nu) = h^{-1} \circ f \circ h^{\pm}(\theta) = h^{-1} \circ f(t$$

Concluimos então que $f|_{M_\nu}$ é semiconjugado à rotação r_ν.

□

Note-se que com ligeiras modificações nas demonstrações de II.6.3, II,6.6 e II.6.7 podemos demonstrar o teorema I.3.3 e corolário I.3.4.. Basta na dem. de II.6.3. identificar o o estado $\underline{u}$ com o levantamento de uma órbita de $\varphi : S^1 \to S^1$, ignorar as segundas coordenadas e identificar T com um levantamento de φ e M_ν^* com P.

II.6.8. Proposição: As descontinuidades de $h^{\pm}$ aparecem em órbitas:

$$\forall_{\theta\in\mathbb{R}} \quad h^+(\theta) = h^-(\theta) \Longleftrightarrow h^+(\theta+\nu) = h^-(\theta+\nu)$$

e portanto
$$h^+(\theta) > h^-(\theta) \Longleftrightarrow h^+(\theta+\nu) > h^-(\theta+\nu)$$

dem. $h^-(\theta) = h^+(\theta) \Longleftrightarrow u^-(\theta)_0 = u^+(\theta)_0$ e por II.6.4. 5) temos $u^-(\theta)_{-1} \leq u^+(\theta)_{-1}$. Se $u^-(\theta)_{-1} < u^+(\theta)_{-1}$ então por II.2.5 vem $u^-(\theta)_1 > u^+(\theta)_1$ o que contradiz II.6.4. 5). Portanto $u^-(\theta)_{-1} = u^+(\theta)_{-1}$ e por II.2.5. $u^-(\theta)_n = u^+(\theta)_n \ \ \forall_{n\in\mathbb{Z}}$, ou seja $h^+(\theta+n\nu) = h^-(\theta+n\nu)$.

□

Esta última proposição permite provar que M_ν^* é um conjunto de Cantor, quando $h^{\pm}$ é descontínua, sem utilizar a teoria dos homeomorfismos de S^1: se $h^{\pm}$ tem uma descontinuidade em θ então também tem em $\theta + n\nu + m \ \ \forall_{n,m\in\mathbb{Z}}$. Estes pontos são densos em $\mathbb{R}$, logo existe um gap entre quaisquer dois pontos de M_ν^*, e portanto a projecção de M_ν^* em S^1 não contém abertos (e dado que esta projecção é invertível em M_ν^*, concluimos que M_ν^* é totalmente desconexo). Como já provámos que M_ν^* é fechado e não tem pontos isolados, temos que M_ν^* é um conjunto de Cantor.

O teorema II.6.3 apenas afirma a possibilidade de M_ν^* ser um conjunto de Cantor. Na proposição seguinte vamos ver, através de um exemplo, que M_ν^* pode ser um conjunto de Cantor mesmo que a aplicação T seja a analítica.

II.6.9. Proposição: Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação definida por $T(x,y) = (x + y - \frac{k}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi x, \ y - \frac{k}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi x)$, com $k \in \mathbb{R}$. Quando $k > 2$ todos os M_ν^* $(\nu \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ são cantoros.

À aplicação T dá-se o nome de aplicação standard e tem como função geradora $g(x,x') = \frac{(x-x')^2}{2} + \frac{k}{(2\pi)^2} \cos 2\pi x$.

<u>dem.</u> Seja $\underline{u}$ um estado minimal e considere-se o segmento $\underline{u}_{-1,1} = \{u_n : -1 \leq n \leq 1\}$. A segunda derivada da acção, com respeito u_o, fixando os extremos u_{-1} e u_1, é dada por:

$$\frac{\partial^2 W_{-1,1}}{\partial u_o^2} = 2 - k \cos 2\pi u_o$$

se $k > 2$ e $u_o = 0$ vem $\frac{\partial^2 W_{-1,1}}{\partial u_o^2} < 0$, o que é contraditório com o facto de $\underline{u}$ ser minimal. Portanto para $k > 2$ não existem órbitas minimais que intersectem a recta $x = 0$. Então M_ν^* não pode ser uma circunferência rotacional invariante. Concluimos que M_ν^* é um cantoro.

$\square$

III. EXPONENTE DE LYAPUNOV E HIPERBOLICIDADE DOS CANTOROS

III.1. Cantoros hiperbólicos

Estudos recentes [III-1] mostram que existem cantoros que são hiperbólicos. Este é um importante facto para o estudo da dinâmica das aplicações twist que preservam a área, numa vizinhança dum cantoro. Neste parágrafo vamos apontar algumas consequências da hiperbolicidade dos cantoros.

Diz-se que um conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ é hiperbólico para um difeomorfismo $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se $T(\Lambda) = \Lambda$ e para todo o $x \in \Lambda$ existirem subespaços de $\mathbb{R}^2$, E^s_x e E^u_x, de dimensão unitária e tais que:

1) $\| DT^n(x)v \| \leq c\ \alpha^n \| v \| \qquad \forall_{n \geq 0} \quad \forall_{v \in E^s_x}$

$\| DT^{-n}(x)v \| \leq c\ \alpha^n \| v \| \qquad \forall_{n \geq 0} \quad \forall_{v \in E^u_x}$

onde $c > 0$ e $0 < \alpha < 1$

2) $DT^n(x)v \in E^s_{T^n(x)} \qquad \forall_{n \in \mathbb{Z}} \quad \forall_{v \in E^s_x}$

$DT^n(x)v \in E^u_{T^n(x)} \qquad \forall_{n \in \mathbb{Z}} \quad \forall_{v \in E^u_x}$

3) $\forall_{x' \in \Lambda} \quad \lim\limits_{\substack{x \to x' \\ x \in \Lambda}} | < v^s_x, v^s_{x'} > | = 1$

onde $v^s_x \in E^s_x$ e $\| v^s_x \| = 1 \quad \forall_{x \in \Lambda}$

$\forall_{x' \in \Lambda} \quad \lim\limits_{\substack{x \to x' \\ x \in \Lambda}} | < v^u_x, v^u_{x'} > | = 1$

onde $v^u_x \in E^u_x$ e $\| v^u_x \| = 1 \quad \forall_{x \in \Lambda}$

onde $DT^n(x)$ é a matriz jacobiana de T^n no ponto x, $\| . \|$ a norma euclidiana em $\mathbb{R}^2$ e $< . , . >$ o seu produto interno.

Diremos que um cantoro $C^* \subset S^1 \times \mathbb{R}$ é hiperbólico para $T^*: S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$ se o seu levantamento $C \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto hiperbólico para o levantamento $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de T^*.

Em [III-2] prova-se o seguinte resultado: Se $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto hiperbólico, então existe uma constante $\varepsilon > 0$ para a qual as seguintes implicações são verdadeiras para todo $x \in \Lambda$:

1) $$\| T^n(x) - T^n(x') \| < \varepsilon \; \forall_{n \geq 0} \wedge \lim_{n \to +\infty} \| T^n(x) - T^n(x') \| = 0$$
$$\Longrightarrow \| T^n(x) - T^n(x') \| \leq c\, \alpha^n \| x - x' \| \qquad \forall_{n \geq 0}$$

2) $$\| T^{-n}(x) - T^{-n}(x') \| < \varepsilon \; \forall_{n \geq 0} \wedge \lim_{n \to +\infty} \| T^{-n}(x) - T^{-n}(x') \| = 0$$
$$\Longrightarrow \| T^{-n}(x) - T^{-n}(x') \| \leq c\, \alpha^n \| x - x' \| \qquad \forall_{n \geq 0}$$

onde $c > 0$ e $0 < \alpha < 1$ são as constantes da definição de conjunto hiperbólico.

Temos então, como aplicação trivial deste resultado, a seguinte proposição:

III.1.1. Proposição: Se C^* é um cantoro hiperbólico então o tamanho dos seus gap's decresce exponencialmente em ambos os sentidos do tempo.

Antes de demonstrarmos esta proposição, iremos introduzir algumas notações que utilizaremos neste capítulo III e que darão sentido à proposição III.1.1.

Se $C \subset \mathbb{R}^2$ é o levantamento dum cantoro $C^* \subset S^1 \times \mathbb{R}$, invariante por $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e se $\bar{x}_o, x_o \in C$ são tais que $\pi_1(\bar{x}_o) < \pi_1(x_o)$ e

$$x \in C \Longrightarrow \pi_1(\bar{x}_o) \geq \pi_1(x) \vee \pi_1(x) \geq \pi_1(x_o) \, ,$$

onde $\pi_1(x,y) = x$, diremos que o segmento de recta $[\bar{x}_o, x_o] = \{\bar{x}_o + t(x_o - \bar{x}_o) : t \in [0,1]\}$ é um gap de C com extremos esquerdo e direito, $\bar{x}_o$ e x_o, respectivamente. A imagem em $S^1 \times \mathbb{R}$ de um gap$[\bar{x}_o, x_o]$ de C é um gap de C^*, e o seu tamanho é $\| x_o - \bar{x}_o \|$.

Note-se que se $[\bar{x}_o, x_o]$ é um gap de C, então $[\bar{x}_n, x_n] = [T^n(\bar{x}_o), T^n(x_o)]$ também o é $\forall_{n\in\mathbb{Z}}$. Neste caso, designamos o conjunto $\{[\bar{x}_n, x_n] : n \in \mathbb{Z}\}$ por uma família de gap's de C.

Neste capítulo III vamos utilizar a notação:

$$\ell_n = T^n(x_o) - T^n(\bar{x}_o) \in \mathbb{R}^2 , \quad \text{onde} \quad [\bar{x}_o, x_o] \text{ é um gap de } C$$

Diremos que os gap's de um cantoro decaiem exponencialmente se existirem constantes $0 < \alpha < 1$ e $c > 0$ tais que:

$$\| \ell_{n+k} \| \leq c\, \alpha^k \| \ell_n \| \qquad \text{e} \qquad \| \ell_{-n-k} \| \leq c\, \alpha^k \| \ell_{-n} \| \qquad \forall_{n,k\geq o}$$

III.1.2. Lema: $\lim_{n \to \pm\infty} \| \ell_n \| = 0$.

dem. O levantamento C de um cantoro é um conjunto monótono; então se $[\bar{x}_n, x_n]$ são gap's de C também o são $[R^p(\bar{x}_n), R^p(x_n)]$ $\forall_{p\in\mathbb{Z}}$, com $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $R(x,y) = (x-1,y)$, e evidentemente $\| R^p(x_n) - R^p(\bar{x}_n) \| = \| x_n - \bar{x}_n \|$ $\forall_{p\in\mathbb{Z}}$, então $\forall_{n\in\mathbb{Z}}\ \exists_{p_n\in\mathbb{Z}} : \pi_1(R^1(x_o)) \leq \pi_1(R^{p_n}(\bar{x}_n)) < \pi_1(R^{p_n}(x_n)) \leq \pi_1(x_o)$.

Por definição de gap, os intervalos $]\pi_1(R^{p_n}(\bar{x}_n)), \pi_1(R^p(x_n))[$ são dijuntos e portanto

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi_1(x_n - \bar{x}_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi_1(R^{p_n}(x_n)) - \pi_1(R^{p_n}(\bar{x}_n)) \leq 1 ,$$

e por II.3.10 temos:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \| x_n - \bar{x}_n \| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{(\pi_1(x_n - \bar{x}_n))^2 + (\pi_2(x_n - \bar{x}_n))^2} \leq$$

$$\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{1 + K_1^2}\, \pi_1(x_n - \bar{x}_n) \leq \sqrt{1 + K_1^2} ,$$

onde K_1 è como em II.3.10. Logo $\lim_{n \to \pm\infty} \| x_n - \bar{x}_n \| = 0$.

□

dem. (de III.1.1.) Como $\lim_{n \to \pm\infty} \| \ell_n \| = 0$, temos que $\forall_{\varepsilon > 0}\ \exists_{N \in \mathbb{N}}$ tal que $n > N \Longrightarrow \| \ell_n \| < \varepsilon \wedge \| \ell_{-n} \| < \varepsilon$. Então pelo resultado de [III-2] acima referido, existe N tal que

$n \geq N \Longrightarrow \| \ell_{n+k} \| \leq c\, \alpha^k \| \ell_n \|$ e $\| \ell_{-n-k} \| \leq c\, \alpha^k \| \ell_{-n} \| \quad \forall_{k \geq 0}$

com $c > 0$ e $0 < \alpha < 1$. Ponha-se então

$$D_1 = \max_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq k \leq N-i}} \frac{\|\ell_{i+k}\|}{\alpha^k \|\ell_i\|} \qquad D_2 = \max_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq k \leq N-i}} \frac{\|\ell_{-i-k}\|}{\alpha^k \|\ell_{-i}\|}$$

e $c' = \max(D_1 \cdot c, D_2 \cdot c)$ para obter $\| \ell_{n+k} \| \leq c' \alpha^k \| \ell_n \|$ e $\| \ell_{-n-k} \| \leq c' \alpha^k \| \ell_{-n} \| \quad \forall_{n,k \geq 0}$.

$\square$

III.1.3. Proposição: Um cantoro hiperbólico C^* invariante por T^* tem apenas um número finito de familias de gap's (MacKay [III-3]).

dem. Supondo, por absurdo, que C^* tem infinitas familias de gap's. Seja para cada $i \in \mathbb{N}$, $[\bar{x}_0^i, x_0^i]$ o gap de maior tamanho de cada familia $(i \in \mathbb{N})$ e $\ell_n^i = x_n^i - \bar{x}_n^i$, com $[\bar{x}_n^i, x_n^i] = [T^n(\bar{x}_0^i), T^n(x_0^i)]$, $(i \in \mathbb{N})$. Portanto $\| \ell_0^i \| \geq \| \ell_n^i \|$ e $0 < \dfrac{\| \ell_n^i \|}{\| \ell_0^i \|} \leq 1 \quad \forall_{n \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}}$.

Seja i_k uma subsucessão de inteiros tal que existam os limites:

$$\lim_{k \to +\infty} R^{q_k}(x_0^{i_k}) = x_0 \quad \text{e} \quad \lim_{k \to +\infty} \frac{\ell_0^{i_k}}{\| \ell_0^{i_k} \|} = v_0, \quad \text{com } q_k \in \mathbb{Z}$$

uma sucessão conveniente de inteiros. Seja $v_n = DT^n(x_0)v_0$, onde $DT^n(x_0)$ é a matriz jacobiana de T^n no ponto x_0. Então

$\lim_{k \to +\infty} \left(\dfrac{\ell_n^{i_k}}{\| \ell_0^{i_k} \|} - v_n \right) = 0$. De facto, pela diferenciabilidade

de T, $\ell_n^{i_k} = DT^n(x_0)\ell_0^{i_k} + o(\| \ell_0^{i_k} \|)$, donde

$$\frac{\ell_n^{i_k}}{\|\ell_o^{i_k}\|} - v_n = DT^n(x_o)\left(\frac{\ell_o^{i_k}}{\|\ell_o^{i_k}\|} - v_o\right) + \frac{o(\|\ell_o^{i_k}\|)}{\|\ell_o^{i_k}\|} ,$$

e como $\sum_k \|\ell_o^{i_k}\| < 1$ tem-se $\lim_{k \to +\infty} \|\ell_o^{i_k}\| = 0.$

Portanto $\|v_n\| \leq 1 \quad \forall_{n \in \mathbb{Z}}$, o que contradiz a hiperbolicidade de C^*. De facto $v_o = \gamma v_{x_o}^s + \theta v_{x_o}^u$ (com $v_{x_o}^s \in E_{x_o}^s$, $v_{x_o}^u \in E_{x_o}^u$, $\|v_{x_o}^s\| = \|v_{x_o}^u\| = 1$ e certas constantes reais γ e θ) e para $n \geq 0$ vem:

$$1 + |\gamma| c\, \alpha^n \geq \|v_n\| + |\gamma| \, \|DT^n(x_o)v_{x_o}^s\| \geq |\theta| \, \|DT^n(x_o)v_{x_o}^u\|$$

$$1 + |\gamma| c\, \alpha^n \geq |\theta| \, \left\| DT^n(x_o) \frac{DT^{-n}(T^n(x_o))v^u_{T^n(x_o)}}{\|DT^{-n}(T^n(x_o))v^u_{T^n(x_o)}\|} \right\|$$

com

$$\|v^u_{T^n(x_o)}\| = 1, \; v^u_{T^n(x_o)} \in E^u_{T^n(x_o)} , \qquad \text{donde}$$

$c\,\alpha^n \geq \|DT^{-n}(T^n(x_o))v^u_{T^n(x_o)}\| \geq \dfrac{|\theta|}{1 + |\gamma| c\, \alpha^n}$, como n é arbitrário positivo e $0 < \alpha < 1$, temos $\theta = 0$. Analogamente, trocando os papéis de s e u, e n com $-n$, concluiríamos que $\gamma = 0$. Donde $v_o = 0$, o que é absurdo pois $\|v_o\| = 1$.

□

III.2. Decrescimento exponencial dos gap's e hiperbolicidade

Vimos no parágrafo precedente que se um cantoro é hiperbólico então os gap's decrescem exponencialmente. Agora, iremos ver que a afirmação recíproca também é verdadeira, se a aplicação twist que preserva a área T fôr de classe C^2.

Utilizaremos as notações do parágrafo precedente:

- C é o levantamento em $\mathbb{R}^2$ de um cantoro $C^* \subset S^1 \times \mathbb{R}$.
- C é invariante por $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, aplicação twist que preserva a área.
- x_o, $\bar{x}_o$ são extremos de um gap de C e $x_i = T^i(x_o)$, $\bar{x}_i = T^i(\bar{x}_o)$ $\forall_{i \in \mathbb{Z}}$.
- $\ell_i = x_i - \bar{x}_i \in \mathbb{R}^2$.
- $DT^n(x)$ é a matriz jacobiana de T^n em x
- $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi_1(x,y) = x$; $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi_2(x,y) = y$.

Dada uma sucessão de pontos $x(i) \in \mathbb{R}^2$, diremos que:

$$x(i) \to x \mod 1 \quad (i \to +\infty)$$

sse existe uma sucessão correspondente de inteiros p_i tal que $\lim\limits_{i \to +\infty} R^{p_i}(x(i)) = x$, onde $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definida por $R(x,y) = (x-1,y)$, i.e., sse a projecção de $x(i)$ em $S^1 \times \mathbb{R}$ converge para a projecção de x.

III.2.1. Lema: Se existem direcções E^u_x e E^s_x para as quais se tem:

$$\forall_{v \in E^s_x} \ \forall_{N \geq o} \ \| DT^N(x)v \| \leq c\,\alpha^N \|v\| \ \wedge \ \| DT^{-N}(x)v \| \geq \frac{1}{c}\,\alpha^{-N} \|v\|$$

$$\forall_{v \in E^u_x} \ \forall_{N \geq o} \ \| DT^{-N}(x)v \| \leq c\,\alpha^N \|v\| \ \wedge \ \| DT^N(x)\, v \| \geq \frac{1}{c}\,\alpha^{-N} \|v\|$$

para certas constantes $c > 0$ e $0 < \alpha < 1$, então as direcções E^s_x e E^u_x estão univocamente determinadas.

<u>dem.</u> Seja $v^s_x \in E^s_x$ e $v^u_x \in E^u_x$ tais que $\| v^s_x \| = \| v^u_x \| = 1$. Vamos supôr, por absurdo, que existe v' não pertencente a E^u_x tal que $\forall_{N \geq 0}$ $\|DT^{-N}(x)v' \| \leq c\,\alpha^N \| v' \|$, e ponha-se $v' = \gamma\, v^s_x + \theta\, v^u_x$

para certos γ e $\theta \in \mathbb{R}$. Donde:

$$c\,\alpha^N(\|v'\| + |\theta|) \geq \|DT^{-N}(x)v'\| + |\theta|\ \|DT^{-N}(x)v_x^u\|$$
$$\geq |\gamma|\ \|DT^{-N}(x)v_x^s\| \geq |\gamma|\ \frac{1}{c}\,\alpha^{-N}$$

e portanto $\quad c^2\,\alpha^{2N}(\|v'\| + |\theta|) \geq |\gamma| \quad \forall_N \geq 0$.

Logo $\gamma = 0$ e $v' = \theta\, v_x^u$. Analogamente se supusermos que v'' é tal que $\|DT^N(x)\, v''\| \leq c\,\alpha^N \|v''\|$ e $v'' = \gamma\, v_x^s + \theta\, v_x^u$ concluímos que $v'' = \gamma\, v_x^s$.

□

III.2.2. Lema: $\pi_1\left(\frac{\ell_n}{\|\ell_n\|}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{1 + K_1^2}} > 0$, onde K_1 é a constante do teorema II.3.10.

dem. $$\pi_1\left(\frac{\ell_n}{\|\ell_n\|}\right) = \frac{\pi_1(\ell_n)}{\sqrt{(\pi_1(\ell_n))^2 + (\pi_2(\ell_n))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\pi_2(\ell_n)/\pi_1(\ell_n))^2}} \geq$$
$$\geq \frac{1}{\sqrt{1 + K_1^2}}$$

□

III.2.3. Proposição: Se $T \in C^2$ e os gap's de C decrescem exponencialmente, então podemos associar univocamente a cada ponto $x \in C$ vectores v_x^s e v_x^u de $\mathbb{R}^2$ que satisfazem as seguintes propriedades:

1) $\|v_x^s\| = \|v_x^u\| = 1$

2) $\pi_1(v_x^s) > 0$; $\pi_1(v_x^u) > 0$

3) $\|DT^N(x)v_x^s\| \leq c\,\alpha^N$; $\|DT^{-N}(x)v_x^u\| \leq c\,\alpha^N \quad \forall_N \geq 0$

com $c > 0$ e $0 < \alpha < 1$ independentes do ponto x

4) $x_{i_n} \to x \mod 1\ (i_n \to +\infty) \Longrightarrow \frac{\ell_{i_n}}{\|\ell_{i_n}\|} \to v_x^s$

5) $x_{j_n} \to x \mod 1\ (j_n \to -\infty) \Longrightarrow \frac{\ell_{i_n}}{\|\ell_{i_n}\|} \to v_x^u$

<u>dem.</u> Pela fórmula de Taylor temos: $\ell_{i+N} = DT^N(x_i)\ell_i + r_i(N)$ com $\| r_i(N) \| \leq c(N) \| \ell_i \|^2$, $\forall_{N,i\in\mathbb{Z}}$, porque $T \in C^2$.

Dado $x_{i_n} \to x \mod 1$ $(i_n \to +\infty)$ seja uma subsucessão $i_{n'}$ de i_n tal que $\dfrac{\ell_{i_{n'}}}{\| \ell_{i_{n'}} \|}$ converge e ponha-se: $v_x^s = \lim\limits_{n' \to +\infty} \dfrac{\ell_{i_{n'}}}{\| \ell_{i_{n'}} \|}$.

Dado $x_{j_n} \to x \mod 1$ $(j_n \to -\infty)$ seja $j_{n'}$ uma subsucessão de j_n tal que $\dfrac{\ell_{j_{n'}}}{\| \ell_{j_n} \|}$ converge e ponha-se $v_x^u = \lim\limits_{n' \to +\infty} \dfrac{\ell_{j_{n'}}}{\| \ell_{j_{n'}} \|}$.

É óbvio que $\| v_x^s \| = \| v_x^u \| = 1$ e, pelo lema III.2.2., que $\pi_1(v_x^s) > 0$ e $\pi_1(v_x^u) > 0$.

Pela fórmula de Taylor temos $\dfrac{\ell_{i_{n'}+N}}{\| \ell_{i_{n'}} \|} = DT^N(x_{i_{n'}}) \dfrac{\ell_{i_{n'}}}{\| \ell_{i_{n'}} \|} + \dfrac{r_{i_{n'}}(N)}{\| \ell_{i_{n'}} \|}$

e como os gap's decrescem exponencialmente temos, para $i_{n'}$ suficientemente grande e $N \geq 0$, que:

$$\frac{\| \ell_{i_{n'}+N} \|}{\| \ell_{i_{n'}} \|} \leq c\, \alpha^N \quad \text{e} \quad \frac{\| \ell_{i_{n'}-N} \|}{\| \ell_{i_{n'}} \|} \geq \frac{1}{c} \alpha^{-N}$$

donde $\| DT^N(x)v_x^s \| \leq c\, \alpha^N$ e $\| DT^{-N}(x)v_x^s \| \geq \frac{1}{c}\, \alpha^{-N}$ $\forall_{N\geq 0}$.

Analogamente, tendo em atenção que $j_{n'} \to -\infty$, concluímos

$$\| DT^N(x)v_x^u \| \geq \frac{1}{c}\, \alpha^{-N} \quad \text{e} \quad \| DT^{-N}(x)v_x^u \| \leq c\, \alpha^N \quad \forall_{N\geq 0}$$

E portanto, pelo lema III.2.1., as direcções v_x^u e v_x^s estão univocamente definidas.

Falta apenas ver que as sucessões $\dfrac{\ell_{i_n}}{\| \ell_{i_n} \|}$ e $\dfrac{\ell_{j_n}}{\| \ell_{j_n} \|}$ são convergentes:

Seja $\gamma = \lim\limits_{n \to +\infty} \sup \left\| \dfrac{\ell_{i_n}}{\| \ell_{i_n} \|} - v_x^s \right\|$, e $i_{n''}$ uma subsucessão tal que $\lim\limits_{n'' \to +\infty} \left\| \dfrac{\ell_{i_{n''}}}{\|\ell_{i_{n''}}\|} - v_x^s \right\| = \gamma$. Da sucessão $\dfrac{\ell_{i_{n''}}}{\|\ell_{i_{n''}}\|}$

pode-se extrair uma subsucessão convergente $\dfrac{\ell_{i_{n'''}}}{\|\ell_{i_{n'''}}\|}$, seja

$v' = \lim\limits_{n''' \to +\infty} \dfrac{\ell_{i_{n'''}}}{\|\ell_{i_{n'''}}\|}$. Mas v' satisfaz as mesmas proprieda-

des que v_x^s e assim $v' = v_x^s$. Logo $\gamma = 0$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ell_{i_n}}{\|\ell_{i_n}\|} = v_x^s$.

Analogamente concluia-se que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ell_{j_n}}{\|\ell_{j_n}\|} = v_x^u$.

$\square$

III.2.4. Proposição: As funções $x \mapsto v_x^s$ e $x \mapsto v_x^u$, com v_x^s e v_x^u definidos pela proposição III.2.3., são funções contínuas em C.

<u>dem.</u> Vamos provar a continuidade de $x \mapsto v_x^s$ (para $x \mapsto v_x^u$ a demonstração é idêntica substituindo s por u).

Seja $x \in C$ e $x(k) \in C$ tal que $\lim\limits_{k \to +\infty} x(k) = x$.

Tendo presente que toda a órbita C é densa e utilizando as alíneas 4) e 5) da proposição III.2.3., podemos construir, para cada k, uma sucessão de extremos de gap's $x_{i(k)_n}$ tal que:

$$\| x_{i(k)_n} - x(k) \| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \left\| \frac{\ell_{i(k)_n}}{\|\ell_{i(k)_n}\|} - v^s_{x(k)} \right\| < \frac{1}{n}$$

Para a sucessão diagonal temos:

$$\| x_{i(k)_k} - x \| \leq \| x_{i(k)_k} - x(k) \| + \| x(k) - x \| < \frac{1}{k} + \| x(k) - x \|$$

então $\lim\limits_{k \to +\infty} x_{i(k)_k} = x$ e por III.2.3. $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{\ell_{i(k)_k}}{\|\ell_{i(k)_k}\|} = v_x^s$

$$\text{mas} \quad \| v_x^s - v_{x(k)}^s \| \leq \| v_x^s - \frac{\ell_{i(k)_k}}{\| \ell_{i(k)_k} \|} \| + \| \frac{\ell_{i(k)_k}}{\| \ell_{i(k)_k} \|} - v_{x(k)}^s \| \leq$$

$$\leq \| v_x^s - \frac{\ell_{i(k)_k}}{\| \ell_{i(k)_k} \|} \| + \frac{1}{k}$$

e portanto $\lim_{k \to +\infty} v_{x(k)}^s = v_x^s$.

□

III.2.5. Proposição: $\dfrac{DT^n(x) v_x^{s,u}}{\| DT^n(x) v_x^{s,u} \|} = v_{T^n(x)}^{s,u}$ $\forall_{n \in \mathbb{Z}}$ com v_x^u e v_x^s definidos na proposição III.2.3.

<u>dem.</u> Se $x_{i_n} \to x$ mod 1 ($i_n \to +\infty$) então $x_{i_n + N} \to T^N(x)$ mod. 1.

Por III.2.3. temos $v_x^s = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{\ell_{i_n}}{\| \ell_{i_n} \|}$ e $v_{T^N(x)}^s = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{\ell_{i_n+N}}{\|\ell_{i_n+N}\|}$

Pela fórmula de Taylor e porque $T \in C^2$ vem:

$$\frac{\| \ell_{i_n+N} \|}{\| \ell_{i_n} \|} \frac{\ell_{i_n+N}}{\| \ell_{i_n+N} \|} = DT^N(x_{i_n}) \frac{\ell_{i_n}}{\| \ell_{i_n} \|} + \frac{r_{i_n}(N)}{\| \ell_{i_n} \|} \quad , \text{ com}$$

$\| r_{i_n}(N) \| < c(N) \| \ell_{i_n} \|^2$, portanto se $\gamma = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{\| \ell_{i_n+N} \|}{\| \ell_{i_n} \|}$,

temos: $\gamma \, v_{T^n(x)}^s = DT^N(x) \, v_x^s$ e $\| v_{T^n(x)}^s \| = \| v_x^s \| = 1$.

□

III.2.6. Teorema (recíproco da proposição III.1.1.): Se $T \in C^2$ e os gap's de C decrescem exponencialmente, então C é hiperbólico.

<u>dem.</u> Consequência directa das proposições III.2.3, III.2.4. e III.2.5, e da definição de conjunto hiperbólico (ver III.1.).

□

III.3. Exponente de Lyapunov de cantoros.

Sendo C^* um cantoro invariante para uma aplicação twist que preserva a área T^*, então C^* suporta uma medida invariante ω para a qual T^* é ergódica (i.e. $\omega(A) = \omega(T^*(A))$ $\forall_{A\subset C^*}$; $T^*(A) = A \Longrightarrow \omega(A) = 1 \vee \omega(A) = 0$; $\omega(C^*) = 1$). De facto podemos construir esta medida ω explicitamente:

$$\omega(A) = \mu(h^{-1}(\pi^*(A))) \qquad \forall_{A\subset C^*}$$

onde μ é a medida de Lebesgue em S^1, π^* é a projecção de $S^1\times\mathbb{R}$ em S^1, e h^{-1} é a semiconjugação de $T^*|_{C^*}$ a uma rotação, definida na demonstração de II.6.7..

Podemos, portanto, aplicar o teorema de Oseledec (ver [III-4] ou [III-5]) para concluirmos que existe exponente de Lyapunov num subconjunto de C de medida ω total.

Neste parágrafo vamos começar por mostrar que na hipótese do decrescimento exponencial dos gap's, o exponente de Lyapunov existe em qualquer ponto do cantoro. Para provarmos este resultado necessitaremos do seguinte teorema:

III.3.1. Teorema: Seja h uma função integrável no sentido de Riemann em $\mathbb{R}$, com $h(t+1) = h(t)$ $\forall_t$ e $\nu \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Então:

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} h(k\nu) = \int_0^1 h(t)dt$$

Uma versão mais geral deste teorema pode ser encontrada em [III-6]

<u>dem.</u> $$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{sen}(2\pi\, pk\nu) = 0 = \int_0^1 \operatorname{sen}(2\pi\, pt)dt \qquad \forall_{p\in\mathbb{N}}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \cos(2\pi\, pk\nu) \begin{array}{l} = 0 = \\ = 1 = \end{array} \int_0^1 \cos(2\pi\, pt)dt \qquad \begin{array}{l} \forall_{p\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \\ p = 0 \end{array}$$

Visto que $\sum_{k=o}^{N-1} e^{i2\pi pk\nu} = \sum_{k=o}^{N-1} \frac{e^{i2\pi p\nu(k+1)} - e^{i2\pi p\nu k}}{e^{i2\pi p\nu} - 1} =$

$$= \frac{e^{i2\pi p\nu N} - 1}{e^{i2\pi p\nu} - 1} \qquad (\text{com } i = \sqrt{-1}) .$$

O espaço vectorial gerado pelas funções $sen(2\pi\, pt)$ e $\cos(2\pi\, pt)$ é uma álgebra de funções reais em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (espaço quociente de $\mathbb{R}$ pela relação de equivalência $\Phi : x\,\Phi\, y \iff \exists_{m\in\mathbb{Z}}\ x = m + y$) que separa os pontos e não se anula em nenhum. Então, pelo teorema de Stone-Weierstrass (ver [III-7]), o seu fecho uniforme é o conjunto das funções contínuas periódicas. E portanto, se f fôr contínua e $f(t) = f(t+1)$, vem

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=o}^{N-1} f(k\nu) = \int_o^1 f(t)dt \qquad \text{(A)}$$

Então dada uma função h integrável à Riemann em $\mathbb{R}$ e que verifica $h(t+1) = 1 + h(t)$ $\forall_{t\in\mathbb{R}}$, e dado $\varepsilon > 0$, existem funções contínuas periódicas de período 1 g e f tais que:

$$g(t) \leq h(t) \leq f(t) \quad \forall_{t\in\mathbb{R}} \quad \text{e que} \quad \int_o^1 f(t) - g(t)dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por (A), existe N_o tal que para $N > N_o$, tem-se:

$$\int_o^1 g(t)dt - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{N}\sum_{k=o}^{N-1} g(k\nu) \leq \frac{1}{N}\sum_{k=o}^{N-1} h(k\nu) \leq \frac{1}{N}\sum_{k=o}^{N-1} f(k\nu) < \int_o^1 f(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}$$

E pela monotonia do integral: $\int_o^1 g(t)dt \leq \int_o^1 h(t)dt \leq \int_o^1 f(t)dt$.

$$\frac{1}{N}\sum_{k=o}^{N-1} h(k\nu) - \int_o^1 f(t)dt \leq \frac{1}{N}\sum_{k=o}^{N-1} h(k\nu) - \int_o^1 h(t)dt \leq \frac{1}{N}\sum_{k=o}^{N-1} h(k\nu) - \int_o^1 g(t)dt$$

$$\int_o^1 g(t) - f(t)dt - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{N}\sum_{k=o}^{N-1} h(k\nu) - \int_o^1 h(t)dt \leq \int_o^1 f(t) - g(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$-\varepsilon \leq \frac{1}{N}\sum_{k=o}^{N-1} h(k\nu) - \int_o^1 h(t)dt \leq \varepsilon$$

E portanto

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h(k\nu) = \int_0^1 h(t)dt$$

□

Utilizando as notações dos parágrafos precedentes, vamos agora provar a seguinte proposição:

III.3.2. Proposição: Se os gap's dum cantoro C^* decrescem exponencialmente e se $T \in C^2$ então o limite

$$-\xi = \lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \| DT^n(x)v_x^s \| ,$$

com v_x^s definido em III.2.3. existe para todo o $x \in C$ e é independente de x.

ξ é o exponente de Lyapunov de C^*.

<u>dem.</u> $\frac{1}{N} \log \| DT^N(x)v_x^s \| = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \log \frac{\| DT^{k+1}(x)v_x^s \|}{\| DT^k(x)v_x^s \|}$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \log \| DT(T^k(x)) \frac{DT^k(x)v_x^s}{\|DT^k(x)v_x^s\|} \|$$

(pela proposição III.2.5.) $= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \log \| DT(T^k(x))v^s_{T^k(x)} \| .$

Dado $x \in C$ então

$$T^k(x) = (h^+(t_o+k\nu), -g_1'(h^+(t_o+k\nu), h^+(t_o+(k+1)\nu))) \equiv H^+(t_o+k\nu) \quad \text{ou}$$

$$= (h^-(t_o+k\nu), -g_1'(h^-(t_o+k\nu), h^-(t_o+(k+1)\nu))) \equiv H^-(t_o+k\nu)$$

com h^+, h^- definidas na demonstração de II.6.3. e g a função geradora de T (ver II.2.).

Como $h^{\pm}$ é contínua excepto num conjunto numerável de pontos, é integrável no sentido de Riemann.

E pela continuidade das funções g_1', v_x^s, $DT(x)$, $\| \cdot \|$ e $\log$, vem que

$$\log \| DT(H^{\pm}(t)) v^s_{H^{\pm}(t)} \|$$

é integrável no sentido de Riemann. Logo pelo teorema III.3.1. vem:

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \log \| DT^N(x) v_x^s \| = \int_0^1 \log \| DT(H^{\pm}(t)) v^s_{H^{\pm}(t)} \| \, dt$$

note-se que

$$\int_0^1 \log \| DT^N(H^+(t)) v^s_{H^+(t)} \| \, dt = \int_0^1 \log \| DT(H^-(t)) v^s_{H^-(t)} \| \, dt$$

$\square$

Concluímos que o exponente de Lyapunov existe em qualquer ponto do cantoro. Vamos agora relacionar o decrescimento exponencial dos gap's com o exponente de Lyapunov.

III.3.3. Lema: $\lim_{i \to +\infty} \left\| \frac{\ell_i}{\| \ell_i \|} - v^s_{x_i} \right\| = 0$ com as notações da proposição III.2.3..

dem. Supondo por absurdo que existe $\delta > 0$ e uma subsucessão $i_n \to +\infty$ tal que:

$$\left\| v^s_{x_{i_n}} - \frac{\ell_{i_n}}{\| \ell_{i_n} \|} \right\| > \delta \qquad \forall_{n \geq 0}$$

então a sucessão correspondente de extremos de gap's x_{i_n}, contém uma subsucessão convergente:

$$x_{i_{n'}} \to x \mod 1 \qquad \text{para certo} \qquad x \in C \ .$$

Logo, pela proposição III.2.3., $\lim_{n' \to +\infty} \frac{\ell_{i_{n'}}}{\| \ell_{i_{n'}} \|} = v_x^s$ e, pela proposição III.2.4., $\lim_{n' \to +\infty} v^s_{x_{i_{n'}}} = v^s_x$. Portanto,

$$\lim_{n' \to +\infty} \left\| v^s_{x_{i_{n'}}} - \frac{\ell_{i_{n'}}}{\| \ell_{i_{n'}} \|} \right\| = 0 \ ,$$ o que contradiz a hipótese $\delta > 0$.

$\square$

III.3.4. Teorema: Se $T \in C^2$ e os gap's de C^* decrescem exponencialmente, então o exponente de Lyapunov de C^* é dado por:

$$-\xi = \lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{|n|} \log \| \ell_n \|$$

<u>dem.</u> Comecemos por notar que se $\dfrac{\| B \|}{\| A \|} < \dfrac{1}{2}$ então:

$$\log \| A \| - 2 \frac{\| B \|}{\| A \|} \leq \log \| A + B \| \leq \log \| A \| + \frac{\| B \|}{\| A \|} \qquad (A)$$

Seja $R = \max_{x \in C} \| DT(x) \|$ (note-se que $DT(x) = DT(x+1)$ e C é fechado) então $\| u \| R^{-1} \leq \| DT(x) u \| \leq R \| u \| \quad \forall_{x \in C} \ \forall_{u \in R^2}$.

Pela fórmula de Taylor $\ell_{i+1} = DT(x_i)\ell_i + r_i$ com $\| r_i \| < c \| \ell_i \|^2$.

Seja $2 > \delta > 0$.

Pelo lema III.1.2. $\exists_{i_1} : i \geq i_1 \Longrightarrow \| \ell_i \| < \dfrac{\delta}{4 c R}$

e por III.3.3. $\exists_{i_2} : i \geq i_2 \Longrightarrow \left\| v^s_{x_i} - \dfrac{\ell_i}{\| \ell_i \|} \right\| < \dfrac{\delta}{4 R^2}$

Seja $i > \max(i_1, i_2)$ e $N > 0$

$$\frac{1}{N} \log \frac{\| \ell_{i+N} \|}{\| \ell_i \|} = \frac{1}{N} \sum_{k=o}^{N-1} \log \frac{\| \ell_{i+k+1} \|}{\| \ell_{i+k} \|}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=o}^{N-1} \log \left\| DT(x_{i+k}) \frac{\ell_{i+k}}{\| \ell_{i+k} \|} + \frac{r_{i+k}}{\| \ell_{i+k} \|} \right\|$$

como $\dfrac{\| r_{i+k} \|}{\| \ell_{i+k} \|} \cdot \dfrac{\| \ell_{i+k} \|}{\| DT(x_{i+k}) \ \ell_{i+k} \|} \leq cR \| \ell_{i+k} \| < \dfrac{\delta}{4}$

usando (A) temos

$$\frac{1}{N}\sum_{k=o}^{N-1} \log \left\| DT(x_{i+k}) \frac{\ell_{i+k}}{\|\ell_{i+k}\|} \right\| - \frac{\delta}{2} \leq \frac{1}{N} \log \frac{\|\ell_{i+N}\|}{\|\ell_i\|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{N}\sum_{k=o}^{N-1} \log \left\| DT(x_{i+k}) \frac{\ell_{i+k}}{\|\ell_{i+k}\|} \right\| + \frac{\delta}{2} \qquad \text{(B)}$$

Mas $\left\| DT(x_{i+k}) \dfrac{\ell_{i+k}}{\|\ell_{i+k}\|} \right\| = \| DT(x_{i+k}) v^s_{x_{i+k}} +$

$$+ DT(x_{i+k}) \left(\frac{\ell_{i+k}}{\|\ell_{i+k}\|} - v^s_{x_{i+k}}\right) \|$$

e $$\frac{\left\| DT(x_{i+k}) \left(\dfrac{\ell_{i+k}}{\|\ell_{i+k}\|} - v^s_{x_{i+k}}\right) \right\|}{\| DT(x_{i+k})\, v^s_{x_{i+k}} \|} \leq R^2 \left\| \frac{\ell_{i+k}}{\|\ell_{i+k}\|} - v^s_{x_{i+k}} \right\| < \frac{\delta}{4}$$

usando novamente (A) vem:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=o}^{N-1} \log \| DT(x_{i+k}) v^s_{x_{i+k}} \| - \frac{\delta}{2} \leq \frac{1}{N}\sum_{k=o}^{N-1} \log \left\| DT(x_{i+k}) \frac{\ell_{i+k}}{\|\ell_{i+k}\|} \right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{N}\sum_{k=o}^{N-1} \log \| DT(x_{i+k}) v^s_{x_{i+k}} \| + \frac{\delta}{2} \qquad \text{(C)}$$

então de (B) e (C) sai que $\forall_{\delta > 0}$ $\exists_{i_o}$ tal que para $i > i_o$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=o}^{N-1} \log \| DT(x_{i+k}) v^s_{x_{i+k}} \| - \delta \leq \frac{1}{N} \log \frac{\|\ell_{i+N}\|}{\|\ell_i\|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{N}\sum_{k=o}^{N-1} \log \| DT(x_{i+k}) v^s_{x_{i+k}} \| + \delta$$

e por III.2.5.

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=o}^{N-1} \log \| DT(x_{i+k}) v^s_{x_{i+k}} \| =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=o}^{N-1} \log \left\| DT(x_{i+k}) \frac{DT^k(x_i)v^s_{x_i}}{\| DT^k(x_i)v^s_{x_i} \|} \right\|$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=o}^{N-1} \log \frac{\| DT^{k+1}(x_i)v^s_{x_i} \|}{\| DT^k(x_i)v^s_{x_i} \|}$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \log \| DT^N(x_i)v^s_{x_i} \| = -\xi$$

Portanto

$$-\xi - \delta \leq \limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \log \frac{\| \ell_{i+N} \|}{\| \ell_i \|} \leq -\xi + \delta$$

Mas

$$\limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \log \frac{\| \ell_{i+N} \|}{\| \ell_i \|} = \limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N} (\log\|\ell_{i+N}\| - \log\| \ell_i \| =$$

$$= \limsup_{N\to+\infty} \frac{i+N}{N} \frac{1}{i+N} \log\| \ell_{i+N} \| = \limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{i+N} \log\| \ell_{i+N} \|$$

$$= \limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \log\| \ell_N \|$$

Donde $-\xi - \delta \leq \limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \log\| \ell_N \| \leq -\xi + \delta$

e como δ é arbitário $\limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \log\| \ell_N \| = -\xi$

Com o mesmo argumento podemos concluir que:

$$\liminf_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \log\| \ell_N \| = -\xi$$

Logo, $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \log\| \ell_N \| = -\xi$.

$\square$

Note-se que $-\xi = \lim\limits_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \log \| \ell_N \| \leq \log \alpha < 0$, se os gap's decrescem exponencialmente, i.e., $\| \ell_{n+k} \| \leq c\, \alpha^k \| \ell_n \|$ com $\alpha < 1$.

Resumindo este terceiro capítulo temos que: se a aplicação twist que preserva a área é de classe C^2, então é válida a seguinte afirmação:

C^* é um cantoro hiperbólico sse os seus gap's decrescem exponencialmente segundo o exponente de Lyapunov.

IV. PROPRIEDADES MÉTRICAS DOS CANTOROS

IV.1 Medidas logarítmicas e subdimensão

Dada uma função $\Psi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ contínua à direita, crescente e com $\Psi(0) = 0$, e um conjunto A num espaço métrico, a Ψ-medida de Hausdorff de A é:

$$\mu_H^{\Psi}(A) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{\substack{d(c_i) \leq \varepsilon \\ \bigcup_i c_i \supset A}} \sum_i \Psi(d(c_i))$$

onde $d(c_i)$ é o diâmetro do elemento c_i duma cobertura aberta de A. Uma vez que o efeito de reduzir ε é restringir a classe de coberturas para as quais é calculado o ínfimo, o supremo em ε pode ser substituído por $\lim_{\varepsilon \to 0^+}$. Prova-se [IV-1] que $\mu_H^{\Psi}(A)$ é uma medida na σ-álgebra dos borelianos. Quando $\Psi(t) = t^d$, $d > 0$, referimo-nos à t^d-medida de Hausdorff por $\mu_H^{(d)}$.

Dado um conjunto A num espaço métrico, existe um único número não negativo d_H, tal que:

$$\mu_H^{(d)}(A) = 0 \quad \text{se} \quad d > d_H$$

$$\mu_H^{(d)}(A) = +\infty \quad \text{se} \quad d < d_H$$

a este número d_H dá-se o nome de dimensão de Hausdorff de A (ver [IV-2])

Em [III-3] prova-se, com base num teorema de Young [IV-3], que todo o cantoro com exponente de Lyapunov diferente de zero, tem dimensão de Hausdorff nula. Implicando, em particular, que a medida de Lebesgue da projecção do cantoro em S^1 é nula, porque $\mu_H^{(1)}$ é uma medida equivalente à medida de Lebesgue em S^1 [IV-1].

Põe-se então o problema da caracterização métrica dos cantoros, visto que a classe dos conjuntos de dimensão Hausdorff zero engloba uma grande diversidade de elementos: desde os conjuntos finitos até aos cantoros que são não numeráveis (porque são conjuntos perfeitos [III-7]). Com o objectivo de solucionar este problema, vamos introduzir os conceitos de medida logarítmica de Hausdorff e de subdimensão.

Seja $\Psi_s(t) = \left(\frac{1}{-\log t}\right)^s$, $s > 0$, se $t \in]0,1[$, $\Psi_s(0) = 0$, $\Psi_s(t) = +\infty$ se $t \geq 1$. Então referiremo-nos à Ψ_s - medida de Hausdorff por s - medida logarítmica de Hausdorff: $\mu_H^{\Psi_s}$.

IV.1.1. Proposição: Dado um conjunto A num espaço métrico, existe um único $s_H \in [0, +\infty]$, tal que:

$$s > s_H \implies \mu^{\Psi_s}(A) = 0$$

$$s < s_H \implies \mu^{\Psi_s}(A) = +\infty$$

<u>dem.</u> Vamos ver que se $\mu_H^{\Psi_{s'}}(A) = M < +\infty$ então $\mu_H^{\Psi_s}(A) = 0$ para todo $s > s'$, o que prova IV.1.1..

Como $\lim_{t \to 0^+} \left(\frac{1}{-\log t}\right)^{s-s'} = 0$, temos que dado $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$

$$\exists_{0 < t_0 < \varepsilon} : \left(\frac{1}{-\log t}\right)^{s-s'} < \frac{\delta}{M+1} \qquad \forall_{0 < t < t_0}$$

Seja $\{c_i\}_i$ uma cobertura aberta de A, tal que:

$$A \subset \bigcup_i c_i \quad ; \quad d(c_i) \leq t_0 \quad ; \quad \sum_i \Psi_{s'}(d(c_i)) < M+1$$

então

$$\sum_i \Psi_s(d(c_i)) \leq \frac{\delta}{M+1} \sum_i \Psi_{s'}(d(c_i)) < \delta$$

donde $\inf_{d(c_i) \leq \varepsilon} \sum_i \Psi_s(d(c_i)) < \delta$. Como δ e ε são arbitrários temos $\mu_H^{\Psi_s}(A) = 0$.

□

Ao número s_H referido em IV.1.1. damos o nome de subdimensão de Hausdorff.

IV.1.2. Proposição: Se a dimensão de Hausdorff de um conjunto é não nula então a sua subdimensão é $+\infty$.

dem. Suponha-se, por absurdo, que $\exists_{d^*>0} : \mu_H^{(d^*)}(A) \neq 0$ e $\exists_{s^*>0} : \mu_H^{\Psi_{s^*}}(A) = 0$.

Como $\lim_{t \to 0^+} \dfrac{t^{d^*}}{\Psi_{s^*}(t)} = 0$, dado $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$, existe $0 < t_0 < \varepsilon$ tal que $\dfrac{t^{d^*}}{\Psi_{s^*}(t)} < \delta \quad \forall_{0<t<t_0}$. Seja $\{c_i\}$ uma cobertura aberta de A, tal que:

$$A \subset \bigcup_i c_i \quad ; \quad d(c_i) \leq t_0 \quad ; \quad \sum_i \Psi_{s^*}(d(c_i)) < 1$$

então $\sum_i (d(c_i))^{d^*} < \delta \sum_i \Psi_{s^*}(d(c_i)) < \delta$. E, portanto, $\mu_H^{(d^*)}(A) < \delta$ como δ é arbitrário vem $\mu_H^{(d^*)}(A) = 0$ contrariamente à hipótese.

$\square$

É em geral difícil de calcular, quer numericamente quer em teoria, a subdimensão e medida logarítmica de Hausdorff de um conjunto A não trivial. Vamos então introduzir a s-medida logarítmica fractal de A:

$$\mu_F^{\Psi_s}(A) = \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \Psi_s(\varepsilon)\, n_A(\varepsilon)$$

onde $n_A(\varepsilon) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ é o número mínimo de bolas abertas de diâmetro ε necessárias para cobrir A.

Apesar da designação que demos a $\mu_F^{\Psi_s}$, não estamos na presença de uma medida, ao contrário do que acontecia com $\mu_H^{\Psi_s}$. A razão para considerarmos $\mu_F^{\Psi_s}$ é que esta constitue uma aproximação da medida logarítmica de Hausdorff fácil de manipular numericamente. Vamos ver na seguinte proposição que $\mu_F^{\Psi_s}$ não é, de facto, uma medida.

IV.1.3. Proposição: $\mu_F^{\Psi_1}$ não é uma medida exterior.

dem. Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : x = e^{-n} \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{e^{-n}\} \equiv \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno seja n_o tal que

$$e^{-n_o}(1 - e^{-1}) < \varepsilon \leq e^{-(n_o - 1)}(1 - e^{-1})$$

Então o número mínimo de bolas abertas de diâmetro ε necessárias para cobrir A é

$$n_A(\varepsilon) = n_o + m \ , \qquad \text{com} \qquad m \in \{1,2\}$$

(n_o para cobrir $\bigcup_{n=o}^{n_o - 1} A_n$ e 1 ou 2 para cobrir $\bigcup_{n=n_o}^{+\infty} A_n$).

Donde $\dfrac{n_o + 1}{n_o - \log(1 - e^{-1})} < n_\varepsilon(A)\ \Psi_1(\varepsilon) \leq \dfrac{n_o + 2}{n_o - \log(e-1)}$

e fazendo $\varepsilon \to 0$, vem $n_o \to \infty$, obtendo-se $\mu_F^{\Psi_1}(A) = 1$.

Mas $n_{A_n}(\varepsilon) = 1 \quad \forall_{\varepsilon > o} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}}$, porque os conjuntos A_n só têm um elemento. Logo $\mu_F^{\Psi_1}(A_n) = 0$ e

$$1 = \mu_F^{\Psi_1}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) > \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_F^{\Psi_1}(A_n) = 0$$

Concluindo-se que $\mu_F^{\Psi_1}$ não é uma medida exterior. $\square$

IV.1.4. Proposição: Dado um conjunto A num espaço métrico, existe um único $s_F \in [0, +\infty]$ tal que

$$s > s_F \implies \mu_F^{\Psi_s}(A) = 0$$
$$s < s_F \implies \mu_F^{\Psi_s}(A) = +\infty$$

A este número s_F chamaremos subdimensão fractal de A.

dem. (análoga à demonstração de IV.1.1.). Vamos ver que se

$\mu_F^{\Psi_{s'}}(A) = M < +\infty$, então $\mu_H^{\Psi_s}(A) = 0 \quad \forall_{s > s'}$.

Seja ε_i uma sucessão decrescente tal que $\lim_{i \to +\infty} \varepsilon_i = 0$ e

$\mu_F^{\Psi_{s'}}(A) = \lim_{i \to +\infty} n_A(\varepsilon_i)\, \Psi_{s'}(\varepsilon_i)$. Dado $\delta > 0$ seja i_o tal que

$\left(\frac{1}{-\log \varepsilon}\right)^{s-s'} < \delta \quad \forall_{\varepsilon < \varepsilon_{i_o}}$. Então $n_A(\varepsilon_i)\Psi_s(\varepsilon_i) \leq \delta\, n_A(\varepsilon_i)\Psi_{s'}(\varepsilon_i)$

para $i > i_o$. Donde $\mu_F^{\Psi_s}(A) = \liminf_{\varepsilon \to o} n_A(\varepsilon)\Psi_s(\varepsilon) \leq \delta M$ como δ

é arbitrário, temos $\mu_F^{\Psi_s}(A) = 0$.

$\square$

IV.1.5. Proposição: $\mu_H^{\Psi_s}(A) \leq \mu_F^{\Psi_s}(A)$. E, consequentemente $s_H \leq s_F$.

dem. $\inf_{d(c_i) \leq \varepsilon} \sum_i \Psi_s(d(c_i)) \leq \inf_{d(c_i) = \varepsilon} \sum_i \Psi_s(d(c_i)) = n_A(\varepsilon)\, \Psi_s(\varepsilon)$

$\square$

IV.1.6. Proposição: $$s_F = \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\log n_A(\varepsilon)}{-\log \Psi_1(\varepsilon)}$$

dem. Ponha-se $SD = \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \dfrac{\log n_A(\varepsilon)}{\log(-\log \varepsilon)}$ (suponha-se $0 < sD < +\infty$)

$$\forall_{\delta > o} \quad \exists_{o < \varepsilon_1 < 1} : \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_1 \Longrightarrow SD - \frac{\delta}{2} < \frac{\log n_A(\varepsilon)}{\log(-\log \varepsilon)}$$

$$\Longrightarrow (-\log \varepsilon)^{SD - \frac{\delta}{2}} < n_A(\varepsilon)$$

$$\Longrightarrow (-\log \varepsilon)^{\frac{\delta}{2}} < \frac{n_A(\varepsilon)}{(-\log \varepsilon)^{SD-\delta}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{n_A(\varepsilon)}{(-\log \varepsilon)^{SD-\delta}} = +\infty \quad (\text{se } \delta < SD$$

Por outro lado,

$$\exists_{\varepsilon_i} : \varepsilon_i \to 0 \wedge \lim_{i \to +\infty} \frac{\log n_A(\varepsilon_i)}{\log(-\log \varepsilon_i)} = SD$$

$$\forall_{\delta > o} \ \exists_{i_o} : i > i_o \Longrightarrow \frac{\log n_A(\varepsilon_i)}{\log(-\log \varepsilon_i)} < SD + \frac{\delta}{2} \wedge \varepsilon_i < 1$$

$$\Longrightarrow n_A(\varepsilon_i) < (-\log \varepsilon_i)^{SD + \frac{\delta}{2}}$$

$$\Longrightarrow \frac{n_A(\varepsilon_i)}{(-\log \varepsilon_i)^{SD+\delta}} < (-\log \varepsilon_i)^{-\frac{\delta}{2}}$$

$$\Longrightarrow \liminf_{\varepsilon \to o} \frac{n_{A(\varepsilon)}}{(-\log \varepsilon)^{SD + \delta}} = 0$$

Portanto $\forall_{\delta > o} \ \mu_F^{\Psi_{SD-\delta}}(A) = +\infty \wedge \mu_F^{\Psi_{SD+\delta}}(A) = 0$.

Logo pela proposição IV.1.4. $SD = SF$.

Os casos $SD = +\infty$ e $SD = 0$ demonstram-se de maneira semelhante.

$\square$

IV.2. Subdimensão dos cantoros

IV.2.1. Teorema: Seja $C \subset S^1$ um conjunto de Cantor, com gap's de tamanho g_n satisfazendo:

i) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n = 1$

ii) $\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{|n|} \sqrt[\alpha]{-\log g_n} = \xi \neq 0 \qquad (\alpha > 0)$

Então a $\frac{1}{\alpha}$ - medida logarítmica fractal é dada por

$$\mu_F^{\Psi_{1/\alpha}}(C) = \lim_{\varepsilon \to o} \frac{n_c(\varepsilon)}{(-\log \varepsilon)^{1/\alpha}} = \frac{2}{\xi} ,$$

consequentemente a sua subdimensão fractal é dada por $S_F = \frac{1}{\alpha}$, e a sua dimensão de Hausdorff é nula.

<u>dem.</u> ii) significa que $\forall_{\xi > \delta > 0}\ \exists_N : |n| > N \implies$

$$\implies e^{-|n|^\alpha(\xi+\delta)^\alpha} < g_n < e^{-|n|^\alpha(\xi-\delta)^\alpha}$$

Fixando $\delta > 0$ defina-se

$$\underline{B} = \min(B_1, 1), \quad \text{com} \quad B_1 = \min_{|n| \leq N} g_n\, e^{|n|^\alpha (\xi+\delta)^\alpha}$$

$$\text{e} \quad \bar{B} = \max(B_2, 1), \quad \text{com} \quad B_2 = \max_{|n| \leq N} g_n\, e^{|n|^\alpha (\xi-\delta)^\alpha}$$

e portanto $\quad \underline{B}\, e^{-|n|^\alpha(\xi+\delta)^\alpha} \leq g_n \leq \bar{B}\, e^{-|n|^\alpha(\xi-\delta)^\alpha}$. (só $\underline{B}$ e $\bar{B}$ dependem de δ).

Seja x_k e $\bar{x}_k$ os extremos direito e esquerdo do gap g_k. Defina-se a origem das coordenadas em S^1, de modo que $x_0 = \frac{g_0}{2}$ e $\bar{x}_0 = 1 - \frac{g_0}{2}$. Então $g_k = x_k - \bar{x}_k$ $(k \neq 0)$.

A demonstração vai ser dividida em cinco alíneas:

a) A distância entre quaisquer pontos do conjunto $S_N = \{x_k\}_{|k| \leq N} \subset C$ é maior que $\underline{B}\exp(-N^\alpha(\xi+\delta)^\alpha)$.

Seja $x_k > x_{k'}$. Então $\bar{x}_k > x_{k'}$ e

$$|x_k - x_{k'}| = x_k - x_{k'} = x_k - \bar{x}_k + \bar{x}_k - x_{k'} > g_k \geq$$

$$\geq \underline{B}\, e^{-|k|^\alpha(\xi+\delta)^\alpha} \geq \underline{B}\, e^{-N^\alpha(\xi+\delta)^\alpha}$$

b) É necessário um mínimo de $2N+1$ intervalos de diâmetro $\underline{B}\exp(-N^\alpha(\xi+\delta)^\alpha)$ para cobrir C.

Por a) cada intervalo de diâmetro $\underline{B}\, e^{-N^\alpha(\xi+\delta)^\alpha}$ contem no máximo um elemento do conjunto $S_N \subset C$ e S_N tem $2N+1$ elementos.

c) $$\liminf_{\varepsilon \to 0^+} \frac{n_c(\varepsilon)}{(-\log \varepsilon)^{1/\alpha}} \geq \frac{2}{\xi}$$

Seja N tal que $\underline{B}\, e^{-(N+1)^\alpha(\xi+\delta)^\alpha} < \varepsilon \leq \underline{B}\, e^{-N^\alpha(\xi+\delta)^\alpha}$ então

$n_c(\varepsilon) \geq n_c(\underline{B}\, e^{-N^\alpha(\xi+\delta)^\alpha}) \geq 2N+1$ por b). Portanto

$$\frac{n_c(\varepsilon)}{(-\log \varepsilon)^{1/\alpha}} > \frac{2\,N+1}{(-\log \underline{B}\ e^{-(N+1)^\alpha\,(\xi+\delta)^\alpha})^{1/\alpha}} =$$

$$= \frac{2\,N+1}{((N+1)^\alpha\,(\xi+\delta)^\alpha - \log \underline{B})^{1/\alpha}}$$

quando $\varepsilon \to 0$, $N \to +\infty$ e $\dfrac{2\,N+1}{((N+1)^\alpha\,(\xi+\delta)^\alpha - \log \underline{B})^{1/\alpha}} \to \dfrac{2}{\xi+\delta}$

donde $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \inf \dfrac{n_c(\varepsilon)}{(-\log \varepsilon)^{1/\alpha}} \geq \dfrac{2}{\xi+\delta}$. Mas δ é arbitrário.

d) A medida de Lebesgue de S^1 retirando os $2N+1$ primeiros gap's de C é menor que $2\,\bar{B}K\,N^{1-\alpha}\exp(-N^\alpha(\xi-\delta)^\alpha)$, para certo $K > 0$.

Dado que $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} g_n = 1$ e que a medida de S^1 é 1 temos

$$1 - \sum_{n=-N}^{N} g_k = \sum_{k=-\infty}^{-N-1} g_k + \sum_{k=N+1}^{+\infty} g_k \leq$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{-N-1} \bar{B}\ e^{-|k|^\alpha(\xi-\delta)^\alpha} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \bar{B}\ e^{-|k|^\alpha(\xi-\delta)^\alpha}$$

$$\leq 2\,\bar{B} \sum_{k=N+1}^{+\infty} e^{-|k|^\alpha(\xi-\delta)^\alpha}$$

$$\leq 2\,\bar{B}\,K\,N^{1-\alpha}\ e^{-N^\alpha(\xi-\delta)^\alpha} \qquad \text{com } K > 0$$

Esta última desigualdade pode ver-se por:

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} e^{-k^\alpha\lambda} \leq \int_N^{+\infty} e^{-t^\alpha\lambda}\,dt \qquad \text{e}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\int_N^{+\infty} e^{-t^\alpha\lambda}\,dt}{N^{1-\alpha}\ e^{-N^\alpha\lambda}} = \lim_{N\to+\infty} \frac{-e^{-N^\alpha\lambda}}{(1-\alpha)N^{-\alpha}\ e^{-N^\alpha\lambda} - \alpha\,N^{\alpha-1}\,N^{1-\alpha}\ e^{-N^\alpha\lambda}}$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{-1}{(1-\alpha)N^{-\alpha} - \alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

donde $\exists_{K>0} : \int_N^{+\infty} e^{-t^\alpha \lambda}\, dt < K\, N^{1-\alpha}\, e^{-N^\alpha \lambda} \qquad \forall_{N \geq 0}$

e) $$\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{n_c(\varepsilon)}{(-\log \varepsilon)^{1/\alpha}} \leq \frac{2}{\xi}$$

De d) concluimos que podemos cobrir C com $2N+1$ intervalos de diâmetro $2\bar{B}\, K\, N^{1-\alpha}\, e^{-N^\alpha(\xi-\delta)^\alpha}$.

Seja $\varepsilon > 0$ (suficientemente pequeno) e N tal que

$$2\, \bar{B}\, K\, N^{1-\alpha}\, e^{-N^\alpha(\xi-\delta)^\alpha} < \varepsilon \leq 2\, \bar{B}\, K(N-1)^{1-\alpha}\, e^{-(N-1)^\alpha\, (\xi-\delta)^\alpha}$$

então

$$n_c(\varepsilon) \leq n_c(2\, \bar{B}\, K\, N^{1-\alpha}\, e^{-N^\alpha(\xi-\delta)^\alpha}) \leq 2\,N+1$$

e

$$\frac{n_c(\varepsilon)}{(-\log \varepsilon)^{1/\alpha}} \leq \frac{2\,N+1}{(-\log(2\bar{B}K(N-1)^{1-\alpha}\, e^{-(N-1)^\alpha(\xi-\delta)^\alpha}))^{1/\alpha}} =$$

$$\leq \frac{2\,N+1}{(-\log(2\bar{B}K(N-1)^{1-\alpha}) + (N-1)^\alpha\, (\xi-\delta)^\alpha)^{1/\alpha}}$$

quando $\varepsilon \to 0$, $N \to +\infty$ e portanto

$$\frac{2\,N+1}{(\log(2\bar{B}K(N-1)^{1-\alpha}) + (N-1)^\alpha\, (\xi-\delta)^\alpha)^{1/\alpha}} \to \frac{2}{\xi-\delta}$$

Logo $\displaystyle\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{n_c(\varepsilon)}{(-\log \varepsilon)^{1/\alpha}} \leq \frac{2}{\xi-\delta}$ e δ é arbitrário.

De c) e e) sai, imediatamente, o resultado pretendido.

$\square$

IV.2.2. Corolário: Seja $C^* \subset S^1 \times \mathbb{R}$ um cantoro hiperbólico para a aplicação twist e que preserva a área T^*. Então C^* tem subdimensão fractal $s_F = 1$. E a sua 1-medida logarítmica fractal é

$$\mu_F^{\Psi_1}(C^*) = \frac{2\,N}{\xi} \quad ,$$

onde N é o número de famílias de gap's de C^* e ξ é o seu expoente de Lyapunov.

<u>dem.</u> Seja $\{[\bar{x}_n^i, x_n^i] : n \in \mathbb{Z}\}$ uma família de gap's para cada i, $(i = 0,\dots,N)$.

Então, pelo teorema III.3.4., $\lim\limits_{n \to \pm\infty} \frac{1}{|n|} \log\| x_n^i - \bar{x}_n^i \| = -\xi$

e pelo teorema II.3.10. temos:

$$-\xi = \lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{|n|} \log \frac{\| x_n^i - \bar{x}_n^i \|}{\sqrt{1 + K_1^2}} \leq \lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{|n|} \log \pi_1(x_n^i - \bar{x}_n^i) \leq$$

$$\leq \lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{|n|} \log\| x_n^i - \bar{x}_n^i \| = -\xi$$

donde $$-\xi = \lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{|n|} \log \pi_1(x_n^i - \bar{x}_n^i) .$$

Seja $g_{nN+(k-1)} = \pi_1(x_n^k - \bar{x}_n^k) \quad k = 1,\dots,N \;;\; n \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{|nN+k-1|} \log g_{nN+k-1} = \lim_{n \to \pm\infty} \frac{|n|}{|nN+k-1|} \cdot \frac{1}{|n|} \log \pi_1(x_n^k - \bar{x}_n^k)$$

$$= \frac{-\xi}{N}$$

e portanto $\lim\limits_{n \to \pm\infty} \frac{1}{|n|} \log g_n = \frac{\xi}{N}$, ou seja a condição ii) do teorema IV.2.1 é satisfeita com $\alpha = 1$ e com ξ substituído por $\frac{\xi}{N}$.

A condição i) de IV.2.1. também é verificada, em consequência de $C^* \subset S^1 \times \mathbb{R}$ ter projecção em S^1 com medida de Lebesgue (em S^1) nula (porque $\xi \neq 0$, [III-3]).

Então o teorema IV.2.1. indica-nos que a projecção de C^* em S^1 tem subdimensão fractal $s_F = 1$ e 1-medida logarítmica fractal igual a $\mu_F^{\Psi_1} = \frac{2N}{\xi}$. Mas, em virtude do teorema II.3.10., é fácil de verificar que o mesmo acontece para o próprio cantoro $C^* \subset S^1 \times \mathbb{R}$

□

BIBLIOGRAFIA CITADA

CAPÍTULO I

[I-1] J.PALIS - 'Introduction to dynamical systems - geometric theory' lectures notes from summer School on Dynamical Systems, I.C.T.P., Trieste, 1988.

[I-2] Z.NITECKI - 'Differentiable Dynamics', MIT Press, 1971.

[I-3] M.R.HERMAN - 'Sur la conjugaision differentiable des difféomorphisms du cercle a des rotations', Pub.Math. I.H.E.S. 49 : 5-234, 1979.

CAPÍTULO II

[II-1] R.S. MACKAY and J.STARK - 'Lectures on orbits of minimal action for area preserving maps' Warwick Univ. report, 1985.

[II-2] S.AUBRY and P.Y. LE DAERON - 'The discrete Frenkel-Kontorova model and its extensions I: exact results for the ground states' Physica 8D : 381-422. 1983.

[II-3] J.N.MATHER - 'Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus'. Topology 21:457-467. 1982.

[II-4] J.N.MATHER -'More Denjoy minimal sets for area preserving diffeomorphisms'. Comment. Math. Helvetici 60:508-557. 1985.

CAPÍTULO III

[III-1] D.L.GOROFF - 'Hyperbolic sets for twist maps' Ergod. Th. and Dynam. Sys. 5:337-339. 1985.

[III-2] M.SHUB - 'Global stability of dynamical systems' Springer--Verlag, Berlin, 1987.

[III-3] R.S.MACKAY - 'Hyperbolic cantori have dimension zero' J.Phys. A: Math. Gen. 20:L559. 1987.

[III-4] R.MAÑÉ - 'Teoria ergódica' Projecto Euclides, I.M.P.A. Rio de Janeiro, 1983.

[III-5] D.RUELLE - 'Ergodic theory of differentiable dynamical systems' Pub. Math. I.H.E.S. 50 p.p. 1979.

[III-6] G.RAUZY - 'Propriétés statistiques de suites arithmétiques Coll. SUP. P.U.F. Vendôme. 1976.

[III-7] W.RUDIN - 'Principles of mathematical analysis' 3rd ed. I.S. ed., Mac graw Hill Inc.. Tokyo. 1976.

CAPÍTULO IV

[IV-1] A.ROGERS - 'Hausdorff measures' Cambridge Univ. Press, Cambridge. 1970.

[IV-2] K.J.FALCONER - 'The geometry of fractal sets' Cambridge Univ. Press. Cambridge. 1985.

[IV-3] L.S.YONG - 'Dimension, entropy and Lyapunov exponents' Ergod. Th. and Dynam. 2 : 109-124. 1982.